**ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
КОЛЛЕДЖ «СОВРЕМЕННАЯ ШКОЛА БИЗНЕСА»
БУДЕННОВСКПИЙ ФИЛИАЛ**

УТВЕРЖДАЮ
Директор БФ ЧПОУ Колледж «СШБ»
_______________ О.Г. Позоян
«27» мая 2022 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

для обучающихся по выполнения практических занятий и самостоятельной работы по учебной дисциплине

БД.05 МАТЕМАТИКА

Специальность
34.02.01 Сестринское дело

Программа подготовки
базовая

Форма обучения
очная

г. Буденновск, 2022

Настоящие методические указания составлены с учетом Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности **34.02.01 Сестринское дело**, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 12.05.2014 N 502(ред. от 24.07.2015).

Методические рекомендации предназначены для обучающихся по выполнению практических занятий и самостоятельной работы по учебной дисциплине БД.03 Родная литература **34.02.01 Сестринское дело.**

Организация-разработчик: БФ Частное профессиональное образовательное учреждение Колледж «Современная школа бизнеса», г. Буденновск.

Разработчик: Кочагина Л.И., преподаватель филиала Колледжа.

Методические рекомендации рассмотрены и одобрены на заседании цикловой методической комиссией медико – биологических дисциплин, протокол № 9 от 27.05.2022 г.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Прочность, осознанность и действенность знаний учащихся наиболее эффективно обеспечивается при помощи активных методов. Среди них важное место занимают практические занятия по решению задач и конкретных организационных управленческих ситуаций. Следует подчеркнуть, что само содержание учебной программы при ограничении времени, отведенном на изучение предмета, требует не столько запоминания, сколько развития умений и навыков самостоятельной работы с учебной литературой.

Решая эти задачи, организуется проведение практических занятий, в ходе которых вырабатываются практические навыки применения знаний.

Методические рекомендации направлены, прежде всего, на оказание методической помощи обучающимся при проведении практических занятий по дисциплине БД.12 Математика. В данном пособии систематизированы задания по решению задач и ситуаций, охватывающих наиболее значимые темы учебной дисциплины.

Для решения предлагаемых заданий практической работы требуется хорошо знать учебный теоретический материал.

При выполнении практических работ необходимым является наличие умения анализировать, сравнивать, обобщать, делать выводы. Решение задачи должно быть аргументированным, ответы на задания представлены полно.

Методические рекомендации по выполнению практических занятий по дисциплине БД.05 Математика, разработаны в помощь обучающимся для выполнения ими практических работ, предусмотренных рабочей программой.

Практические занятия проводятся после изучения соответствующих разделов и тем учебной дисциплины. Так как учебная дисциплина имеет прикладной характер, то выполнение обучающимися практических работ позволяет им понять, где и когда изучаемые теоретические положения и практические умения могут быть использованы в будущей практической деятельности.

Целью практических занятий по дисциплине БД.05 Математика является закрепление обучающимися теоретического материала по специальности и выработка навыков самостоятельной профессиональной и научно-исследовательской деятельности в области менеджмента.

Задачи практических занятий обусловлены необходимостью получения выпускником знаний, умений, навыков согласно требованиям ФГОС, на основе которых формируются соответствующие компетенции.

2. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Начинать работу на занятии рекомендуется с ознакомления с кратким теоретическим материалом, касающимся практического занятия. Затем осуществляется контроль понимания обучающимися наиболее общих терминов. Далее следует разбор решения типовой задачи практического занятия. В том случае, если практическое занятие не содержит расчетного задания, а связано с изучением и анализом теоретического материала, необходимо более подробно остановиться на теоретических сведениях и ознакомиться с источниками литературы, необходимыми для выполнения данного практического занятия.

В ходе выполнения расчетных заданий обучающиеся научатся реализовывать последовательность действий при использовании наиболее распространенных методов и делать выводы, вытекающие из полученных расчетов.

Каждое из практических занятий может представлять небольшое законченное исследование одного из теоретических вопросов изучаемой дисциплины.

В конце каждого занятия необходим контроль. Контрольные вопросы должны способствовать более глубокому изучению теоретического курса, связанного с темой практического занятия. Также контрольные вопросы должны помочь в решении поставленных перед учащимся задач и подготовке к сдаче практического занятия.

В общем виде методика проведения практических занятий включает в себя рассмотрение теоретических основ и примера расчета, выдачу многовариантного задания и индивидуальное самостоятельное выполнение обучающимся расчетов. Освоение методики расчета осуществляется во время проведения практических занятий, далее самостоятельно обучающиеся выполняют расчетные работы в соответствии заданиями.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Практическое занятие: № 1 Входной контроль на определение уровня остаточных знаний за курс средней общеобразовательной школы

Практическое занятие: № 2 Работа с целыми и рациональными числами

Практическое занятие: № 3 Работа над действительными числами

Практическое занятие: № 4 Приближенные вычисления

Практическое занятие: № 5 Действия над комплексными числами

Практическое занятие: № 6 Вычисление и сравнение корней

Практическое занятие: № 7 Вычисление степени с действительным показателем

Практическое занятие: № 8 Преобразование и вычисление значений логарифмических выражений

Практическое занятие: № 9- 10 Логарифм произведения, частного, степени; переход к новому основанию

Практическое занятие: № 11 Градусная и радианная мера угла

Практическое занятие: № 12 Тригонометрические функции числового аргумента

Практическое занятие: № 13 Основные тригонометрические тождества

Практическое занятие: № 14 Решение тригонометрических уравнений

Практическое занятие: №15 Решение тригонометрических неравенств

Практическое занятие: № 16 Построение графиков тригонометрических функций с помощью тригонометрических преобразований

Практическое занятие: № 17 Функции. Область определения и множество значений функции

Практическое занятие №18 Промежутки возрастания, убывания, наибольшее, наименьшее значения функции. Точки экстремума

Практическое занятие: № 19 Степенная функция, ее график и свойства

Практическое занятие: № 20 Тригонометрические функции, их свойства и графики

Практическое занятие: № 21 Показательная функция, ее свойства и график

Практическое занятие: № 22 Логарифмическая функция, ее свойства и график.

Практическое занятие: № 23 Предел последовательности

Практическое занятие: № 24 Решение задач

Практическое занятие: № 25 Решение задач на непрерывность функции
Практическое занятие: № 26 Вычисление производных
Практическое занятие: № 27 Вычисление производных
Практическое занятие: № 28 Вычисление производных основных элементарных функций.
Практическое занятие: № 29 Вычисление первообразных
Практическое занятие: № 30 Нахождение неопределенного интеграла
Практическое занятие: № 31 Нахождение определенного интеграла
Практическое занятие: № 32 Решение рациональных, логарифмических уравнений
Практическое занятие: № 33 Вычисление производных основных элементарных функций.
Практическое занятие: № 34 Решение задач по стереометрии
Практическое занятие: № 35 Решение задач по стереометрии
Практическое занятие: № 36 Решение задач
Практическое занятие: № 37 Решение задач
Практическое занятие: № 38 Построение сечений
Практическое занятие: № 39 Решение задач по теме «Цилиндр и конус»
Практическое занятие: № 40 Отношения объемов подобных тел
Практическое занятие: № 41 Вычисление объемов тел и поверхностей вращения
Практическое занятие: № 42 Итоговая контрольная работа

4. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие № 1.

Входной контроль на определение уровня остаточных знаний за курс средней общеобразовательной школы

Цель практической работы: проверка качества и уровня подготовки обучающихся.
Задачи практической работы:
проверить знания теоретического материала за курс средней школы;
выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Вариант № 1

1. Вычислите значение выражения $\left(\frac{41}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}+\left(\frac{8}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{99}{49}+\frac{7}{6}.$

2. Упростите выражения.

а) $(a+5)(a^2-5a+25);$ б) $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2-b^2};$ в) $\sqrt{8}+2\sqrt{2}+\sqrt{32}.$

3.Выполните действия.

$а)\ \frac{x}{a^2+ax}+\frac{1}{a+x},$ $\quad б)\ \frac{b^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{4a^2b-ab^2}{b^3-a^3}+\frac{a}{a-b};$

4. Решите уравнения.

$а)\ (5x+3)^2=5(x+3);$ $\quad б)\ \frac{3}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{28}{1-x^2}.$

5. Решите неравенства.

$а)\ 17-x>10-6x,$ $\quad б)\ 2(3-z)-3(2+z)\le z.$

6. Решите задачу с помощью системы уравнений:

Периметр прямоугольного треугольника равен 84 см, а его гипотенуза равна 37 см. Найдите площадь этого треугольника.

Вариант № 2

1. Вычислите значение выражения $\frac{10}{16}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{17}{4}:17\right)+3,75:\frac{5}{6}$;

2. Упростите выражения.

а) $(2b-1)(1+2b+4b^2)$; б) $\frac{(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)}{a-b}$; в) $\sqrt{7}+2\sqrt{7}-\sqrt{28}$.

3. Выполните действия.

$а)\ \frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$; $б)\ \frac{1}{x^2+3xy}+\frac{2}{9y^2-x^2}+\frac{1}{2x-6y}$;

4. Решите уравнения.

$а)\ \frac{3x^2+x}{x}=0$; $б)\ \frac{x+1}{6}+\frac{20}{x-1}=4.$

5. Решите неравенства.

$а)\ 2x-17\geq -27$; $б)\ 4(2-3x)-(5-x)>11-x.$

6. Решите задачу с помощью системы уравнений:

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см. Если один из его катетов увеличить на 4 см, то гипотенуза увеличиться на 2 см. Найдите катеты треугольника.

Практическое занятие № 2.
Работа с целыми и рациональными числами

Цель практической работы:

- знать, что такое натуральное, целое, рациональное число, периодическая дробь;
- уметь записывать бесконечную десятичную дробь в виде обыкновенной,
- уметь выполнять действия с десятичными и обыкновенными дробями.

Задачи практической работы:

1. Проверить знания теоретического материала.
2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Каждое рациональное число можно представить в виде периодической десятичной дроби.

Вспомним, что такое **периодическая дробь**. Это бесконечная десятичная дробь, у которой начиная с некоторого десятичного знака повторяется одна и та же цифра или несколько цифр – период дроби. Например, 0,3333…= 0,(3);

1,057373…=1,05(73).

Читаются эти дроби так : «0 целых и 3 в периоде», «1 целая, 5 сотых и 73 в периоде».

Запишем рациональные числа в виде бесконечной периодической десятичной дроби: натуральное число 25 = 25,00…= 25,(0); целое число -7 = -7,00…= -7,(0); обыкновенная дробь $-\frac{23}{10}$ = -2,300…= - 2,3(0); $\frac{23}{15}$ = 1,533…=1,5(3) (пользуемся алгоритмом деления уголком).

Справедливо и обратное утверждение: каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом, так как может быть представлена в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое число, n – натуральное число.

Рассмотрим пример:

Пусть x= 0,2(18) умножая на 10, получаем 10x = 2,1818…(Нужно умножить дробь на 10^n, где n – количество десятичных знаков, содержащихся в записи этой дроби до периода: $x10^n$).

Умножая обе части последнего равенства на 100, находим

1000x = 218,1818…(Умножая на 10^k, где k – количество цифр в периоде $x10^n10^k=x10^{n+k}$).

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем 990x = 216, x = $\frac{216}{990}=\frac{12}{55}$.

Практическая часть

1.Записать в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{3}$ - на доске;

3) $\frac{3}{5}$ - за доской один учащийся записывает решение, остальные решают на местах, потом проверяют друг друга;

5) -8$\frac{2}{7}$ - под диктовку, все выполняют задание, а один проговаривает вслух.

2. Выполнить действия и записать результат в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{11}+\frac{1}{9}$ - на доске;

3) $\frac{1}{3}$+1,25 – под диктовку, все выполняют задание, а один проговаривает вслух;

5) $\frac{3}{14}$ 1,05 – самостоятельно с последующей проверкой.

3. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:

6) -2,3(82) – преподаватель показывает на доске решение, опираясь на алгоритм:

X = -2,3(82) = -2,3828282…

10x = -23,828282…

1000x = -2382,8282…

1000x – 10x = -2382,8282…- (23,828282…)

990x = - 2359

X = - $\frac{2359}{990}$ = -2$\frac{379}{990}$.

1. 0,(6); 3) 0,1(2); 5) -3,(27) – на доске учащиеся выходят по очереди.

Решение тренировочных упражнений на закрепление

Задача 1. Записать число $\frac{27}{11}$ в виде бесконечной десятичной дроби.

Решение: $27 \div 11 = 2{,}454545454545 = 2,(45)$

Задача 2. Представить бесконечную периодическую десятичную дробь $0,2(18)$ в виде обыкновенной.

Решение:

1.Пусть $x = 0,2(18) = 0,2181818 \ldots$. Так как в записи этого числа до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем

$$\mathbf{10x = 2,181818\ldots \ (1)}$$

2) Период этой дроби состоит из двух цифр. Поэтому, умножая обе части последнего равенства на $10^2 = 100$, находим

$$\mathbf{1000x = 218,181818\ldots \ (2)}$$

3)Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем

$$\mathbf{990x = 216}$$

$$\mathbf{x = \frac{216}{990} = \frac{12}{55}}$$

4. Вычислить:

а. Выполнить действия и записать результат в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{11} + \frac{1}{9}$; **2)** $\frac{8}{13} + \frac{2}{3}$; **3)** $\frac{1}{3} + 1,25$;

4) $\frac{1}{6} + 0,33$; **5)** $\frac{3}{14} \cdot 1,05$; **6)** $\frac{7}{9} \cdot 1,7$.

б. Выполнить самостоятельно

1. (20,88 : 18 + 45 : 0,36) : (19,59 + 11,95);
2. $\frac{7}{36} \cdot 9 + 8\frac{11}{32} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{18}$.
3. (20,88:18+45:0,36): (19,59+11,95)
4. $(3\frac{4}{25} + 0,24)2,15 + (5,1625 - 2\frac{3}{16})\frac{2}{5}$ - самостоятельно с последующей проверкой.

Самостоятельная работа

1 вариант	2 вариант
Закончите предложения таким образом, чтобы высказывание стало истинным	
1. Натуральное число делится на 3, если …….сумма цифр этого числа делится на 3	1. Натуральное число делится на 4 если, ……. две его последние цифры нули или число, кратное 4.
2. Натуральное число делится на 5 если, …….если число оканчивается на цифру ноль или цифру 5	2. Натуральное число делится на 9 если, ……. сумма цифр этого числа делится на 9
3. Каждое натуральное число можно записать в виде бесконечной периодической дроби с периодом….. ноль	3. Каждое целое число можно записать в виде бесконечной периодической дроби с периодом….. ноль
Представьте бесконечную периодическую десятичную дробь в виде десятичной	
Решение: $x = 1,(4) = 1,4444 \ldots \ldots$ *Так как в записи нашего числа до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем*	Решение: $x = 2,(8) = 2,8884 \ldots \ldots$ *Так как в записи нашего числа до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем*

1) $10x = 14{,}444\ldots.$ *Период нашей дроби состоит из одной цифры. Поэтому, умножая обе части последнего равенства на* $10^1 = 10$, *находим* 2) $100x = 144{,}444\ldots.$ *Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем* 3) $90x = 130$ $x = \frac{130}{90} = \frac{13}{9} = 1\frac{4}{9}$	1) $10x = 28{,}888\ldots.$ *Период нашей дроби состоит из одной цифры. Поэтому, умножая обе части последнего равенства на* $10^1 = 10$, *находим* 2) $100x = 288{,}888\ldots.$ *Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем* 3) $90x = 260$ $x = \frac{260}{90} = \frac{26}{9} = 2\frac{8}{9}$
 Решение: $x = 0,(13) = 0{,}1313\ldots\ldots$ *Так как в записи нашего числа до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем* 1) $10x = 1{,}31313\ldots.$ *Период нашей дроби состоит из двух цифр. Поэтому, умножая обе части последнего равенства на* $10^2 = 100$, *находим* 2) $1000x = 131{,}31313\ldots.$ *Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем* 3) $990x = 130$ $x = \frac{130}{990} = \frac{13}{99}$ $-3{,}1(7) = -3\frac{8}{45}$ $0{,}12(15) = \frac{401}{3300}$	$-0,(15) = -\frac{15}{99}$ **Решение:** $x = 0,(15) = 0{,}1515\ldots\ldots$ *Так как в записи нашего числа до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем* 1) $10x = 1{,}51515\ldots.$ *Период нашей дроби состоит из двух цифр. Поэтому, умножая обе части последнего равенства на* $10^2 = 100$, *находим* 2) $1000x = 151{,}51515\ldots.$ *Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем* 3) $990x = 150$ $x = \frac{150}{990} = \frac{15}{99}$ значит $-0,(15) = -\frac{15}{99}$ $0{,}15(13) = \frac{749}{4950}$

Контрольные вопросы

1. Множества каких чисел вы знаете? Приведите примеры.
2. Что такое периодическая дробь?
3. Как записать периодическую дробь в виде обыкновенной?
4. Проведите самоанализ: «Чему научились и что нового узнали?»

Практическое занятие №3. Работа над действительными числами

Цель практической работы:

– закрепить знания и умения студентов по освоению темы.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1.

Выберите среди данных чисел натуральные, целые, рациональные, иррациональные:

1вариант	4; - 0,7; cos 60^0 ; - 5; $\sqrt{\frac{1}{4}}$; 0; ; $\sqrt{11}$; 4,3; sin 45^0.
2вариант	0,2; 5; $\sqrt{31}$; ; -62; $\sqrt{0,3}$; -1,3; 0; sin 60^0; cos 45^0.

Задание 2.

Выполнить действия: $A+B;\ A-B;\ A\cdot B;\ \frac{A}{B}$:

№	A	B
1вариант		$-\frac{1}{12}$
2вариант	$-\frac{9}{14}$	

Задание 3.

Найдите неизвестный член пропорции:

1вариант	$x: 2,4 = 17,5: 2$
2вариант	$4,5: 0,6 = x: 2,4$

Контрольные вопросы:

1. Может ли сумма двух рациональных чисел быть иррациональным числом?
2. Сумма двух иррациональных чисел может быть рациональным числом?
3. Что называется обыкновенной дробью?
4. Какая дробь называется правильной (неправильной)?
5. Что называется смешанным числом?
6. Как перевести смешанное число в обыкновенную дробь?
7. Какая дробь называется десятичной?
8. Что называется периодической дробью?
9. Что называется иррациональным числом?
10. Что называется множеством действительных чисел?
11. Каков порядок действий при вычислениях?

Практическое занятие № 4. Приближенные вычисления

Цель практической работы:

– закрепить знания и умения студентов по освоению приближенных вычислений, определению абсолютной и относительной погрешности;

– научиться вычислять приближенное значение величины и определять точность приближения.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Теоритическое обоснование:

Приближенные вычисления с помощью правил подсчета цифр

I. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном, данном с наименьшим числом десятичных знаков.

Пример. Найти сумму приближенных чисел 127,42; 67,3; 0,12 и 3,03.

Решение: 127,42 + 67,3 + 0,12 + 3,03 = 197,87 $\approx$ 197,9

Пример. Найти разность чисел: 418,7 - 39,832 = 378,868 $\approx$ 378,9

II. При умножении и делении приближенных чисел в произведении надо сохранить столько значащих цифр, сколько их есть в данном числе с наименьшим количеством значащих цифр.

Пример. Умножить приближенные числа 3,4 и 12,32.

Решение: 3,4 х 12,32 = 41,888 $\approx$ 42

Задача. Площадь прямоугольной грядки приближенно равна 7,6 кв. м, ширина -2,38 м. Чему равна ее длина?

Решение. Длина грядки равна частному от деления 7,6 на 2,38.

Действие деления выполняют так: 7,60 : 2,38 = 3,19 $\approx$ 3,2(м)

Последнюю цифру частного 9 можно было и не писать, а, получив в частном две значащие цифры, заметив, что остаток больший половины делителя, округлить частное с избытком.

III. При возведении приближенных чисел в квадрат, и куб в результате сохраняется столько значащих цифр, сколько их в основании.

Примеры.

$2{,}3^2 = 5{,}29 \approx 5{,}3$;

$0{,}8^3 = 0{,}512 \approx 0{,}5$.

IV. В промежуточных результатах следует брать одной цифрой больше, чем рекомендуют предыдущие правила.

V. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при действиях первой ступени) или больше значащих цифр (при действиях II и III ступеней), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну запасную цифру.

VI. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с *k* цифрами данные следует брать с таким числом цифр, которое дает согласно правилам I - IV *k* + 1 цифру в результате.

Применение правил.

Применение вычислений способом подсчета цифр рассмотрим на примере.

Пример. Найти значение $x = \frac{(a-b)c}{[illegible]}$, если $a \approx 9{,}31$, $b \approx 3{,}1$, $c \approx 2{,}33$.

Решение.
$a - b = 9{,}31 - 3{,}1 = 6{,}21$;
$(a - b)\,c = 6{,}21 \cdot 2{,}33 \approx 14{,}5$;
$a + b = 9{,}31 + 3{,}1 = 12{,}4$;
$x = 14{,}5 : 12{,}4 \approx 1{,}2$.
Ответ. $x \approx 1{,}2$.

Примечание. Сформулированные выше правила подсчета цифр имеют вероятностный смысл: они наиболее вероятны, хотя существуют примеры, не удовлетворяющие этим правилам. Поэтому вычисления способом подсчета цифр - самый грубый способ оценки погрешности результатов действий. Однако он очень прост и удобен, а точность таких вычислений вполне достаточна для большинства технических расчетов. Поэтому этот способ широко распространен в вычислительной практике.

В более ответственных вычислениях пользуются способом границ или способом граничных погрешностей.

Метод границ приближенного значения величины.

Метод границ использует свойства неравенств для определения приближенного значения.

Пусть m_x – нижняя граница величины x, n_x – верхняя граница величины x,

m_y – нижняя граница величины y, n_y – верхняя граница величины y, т.е. $m_x<x<n_x$, $m_y<y<n_y$, тогда $km_x<kx<kn_x$, при $k>0$ и $kn_x<kx<km_x$, при $k<0$, тогда

$m_x + m_y < x+y < n_x+ n_y$	$m_x – n_y <x – y < n_x - m_y$
$m_x * m_y <x*y < n_x* n_y$	$m_x / n_y <x/y < n_x/ m_y$

Пример1. Пусть $3{,}2<x<3{,}5$ и $2{,}6<y<2{,}8$.

Найдем границы $x+y$, $x-y$, $x*y$, x/y, $3x$, $-4y$.

Решение:

а) $3{,}2+2{,}6 <x+y<3{,}5+2{,}8$, т.е. $5{,}8<x+y<6{,}3$

б) $3{,}2-2{,}8< x-y <3{,}5-2{,}6$,т.е. $0{,}4<x-y<0{,}9$

в) $3{,}2*2{,}6< x*y <3{,}5*2{,}8$, т.е $8{,}32< x*y< 9{,}8$

г) $3{,}2 / 2{,}8 <x/y<3{,}5 / 2{,}6$, т.е. $1{,}14<x/y< 1{,}34$

д) $9{,}6< 3x <10{,}5$

е) $–11{,}2 < –4y < –10{,}4$

2. Точность приближенных значений величин

Пусть a – приближенное значение величины x с точностью h_a, b – приближенное значение величины y с точностью h_y , т.е. $|x-a|<h_x$ или $x=a \pm h_x$; $|y-b|<h_y$ *или* $y=b \pm h_y$, где h_x и h_y – абсолютные погрешности величин x и y

$\varepsilon = \dfrac{h}{|a|}$ - относительная погрешность. Тогда $h_{x+y}=h_x+h_y$, $\varepsilon_{xy}=\varepsilon_x + \varepsilon_y$

Пример 2

$24 < x < 26$
$15 < y < 18$
Найти x+y, x-y, x*y, x/y
Решение
$a=(24+26)/2=25$, $h_x=1$; $b=(15+18)/2=16{,}5$, $h_y=1{,}5$, тогда
1) $x+y = a+b \pm h_{x+y}$, где $h_{x+y}= h_x+h_y$ т.е.

$x + y =25+16{,}5 \pm (1+1{,}5) = 41{,}5 \pm 2{,}5$;

2) $x - y= a-b \pm h_{x-y}$,где $h_{x-y}= h_x+h_y$, тогда
$x - y =25-16{,}5 \pm (1+1{,}5) = 8{,}5 \pm 2{,}5$

3) Найдем $x*y = a*b \pm h_{xy}$
Вычислим $a*b = 25*16{,}5 = 412{,}5$.Т.к. $h_{xy}= \varepsilon_{xy} *ab$ и $\varepsilon_{xy}=\varepsilon_x + \varepsilon_y$, где $\varepsilon_x = \dfrac{h_x}{|a|} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$

$\varepsilon_y = \dfrac{h_y}{|b|} = \dfrac{1{,}5}{16{,}5} = 0{,}09$, получим $\varepsilon_{xy}= 0{,}04+0{,}09 = 0{,}13$, а значит
$h_{xy}= \varepsilon_{xy} *ab = 0{,}13 *412{,}5 = 53{,}625$,
т.е. $x*y = a*b \pm h_{xy} = 412{,}5 \pm 53{,}625$

4) Аналогично $x/y = a/b \pm h_{x/y}$
Найдем $a/b = 25/16{,}5 \approx 1{,}52$.
$h_{x/y}= \varepsilon_{x/y} *a/b$ $\quad \varepsilon_{x/y}=\varepsilon_x + \varepsilon_y= \varepsilon_{xy}$
$h_{x/y}= \varepsilon_{x/y} *a/b = 0{,}13*1{,}52 \approx 0{,}198$, получим
$x/y = a/b \pm h_{x/y} = 1{,}52 \pm 0{,}198$
Ответ: $x + y = 41{,}5 \pm 2{,}5$; $x- y = 8{,}5 \pm 2{,}5$; $x*y = 412{,}5 \pm 53{,}625$; $x/y = 1{,}52 \pm 0{,}198$

Самостоятельная работа
Даны верхняя и нижняя граница величин x и y.
№1
Определить границы величин 3x, -4x+2, 2x+y, x*y, 4x/y.
№2
Найти абсолютную и относительную погрешность величин x и y, а также x+y и x-y
№3
Найти относительную погрешность величин x*y и x/y и их приближенное значение.

Таблица данных

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант	5 вариант	6 вариант
$2{,}3 < x < 2{,}5$ $3{,}4< y <3{,}8$	$1{,}2< x <1{,}8$ $4{,}3 < y < 4{,}7$	$2{,}8 < x < 3{,}6$ $6{,}2 < y < 6{,}6$	$1{,}4 < x < 1{,}8$ $3{,}4 < y < 3{,}6$	$2{,}5 < x < 2{,}7$ $5{,}1 < y < 5{,}5$	$4{,}3 < x < 4{,}7$ $1{,}7 < y <2{,}1$

Практическое занятие №5. Действия над комплексными числами

Цель практической работы:
- знать алгебраическую форму комплексного числа;
- знать тригонометрическую форму комплексного числа;

– уметь выполнять действия над комплексными числами, представленными в различных формах.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Сведения из теории:

Алгебраическая форма комплексного числа

Обозначим $\sqrt{-1}=i$ и назовём мнимой единицей, ($i^2=-1$). Тогда число вида $z=a+bi,$ где a и b - любые действительные числа, назовём комплексным числом.

Здесь a - называют действительной частью комплексного числа, bi - называют мнимой частью, b - коэффициентом мнимой части комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме

Пусть даны два числа $z_1=a_1+b_1i,$ и $z_2=a_2+b_2i$.

Для этих чисел понятия равенство и действия сложения, умножения определены следующим образом:

1) Два комплексных числа называются равными, если равны их действительная и мнимая части, т. е. $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

2) Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$.

3) Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$.

4) Модулем комплексного числа называется длина вектора соответствующего этому комплексному числу на плоскости и вычисляется по формуле: $|\vec{z}|=r=\sqrt{a^2+b^2}$.

5) Аргументом комплексного числа называется угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси и вычисляется по формуле: $\arg z=\arg(a+bi)=\phi+2\pi k$. Т. о. для каждого комплексного числа можно указать бесконечное множество аргументов.

Для нахождения аргумента необходимо:

1. Определить в какой координатной четверти находится комплексное число.
2. Найти в этой четверти угол решив уравнение:

$$tg\phi=\frac{b}{a};\ \phi=arctg\frac{b}{a}=\phi+\pi k,\ k\in Z.$$

Пример 1.

Решите квадратное уравнение: $x^2-6x+13=0$.

Решение:

вычислим корни квадратного уравнения через дискриминант:

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 13}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16\cdot(-1)}}{2}=\frac{6\pm 4i}{2}.$$

$x_1 = \frac{6 \pm 4i}{2} = \frac{2(3+2i)}{2} = 3+2i;\ \ x_2 = 3 - 2i.$

Получена пара взаимно - сопряжённых комплексных чисел $3 \pm 2i$, где $a = 3; b = 2.$

Заметим, что всякое алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней, среди которых могут быть как действительные (различные или равные), так и комплексные (обязательно попарно взаимно – сопряжённые) корни.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $a + bi = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме

Над комплексными числами в тригонометрической форме выполняются действия умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня n-ой степени.

Пусть даны два числа $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$, тогда:

1) Произведением комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$.

2) Частным комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$.

3) Для возведения в степень: $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$.

Пример 2.

Упростите: $\frac{1+2i^5}{1+3i^{21}}$.

Решение: упростим дробь (понизим степень числителя и знаменателя), используя ($i^2 = -1$):

$i^5 = i^4 i^1 = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i;$

$i^{21} = i^{20} i^1 = (i^2)^{10} i = (-1)^{10} i = i$.

Подставим полученные выражения в исходную дробь и преобразуем её:

$$\frac{1+2i^5}{1+3i^{21}} = \frac{1+2i}{1+3i} = \frac{(1+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i+2i-6i^2}{1+9} = \frac{1-i+6}{10} = \frac{7-i}{10} = \frac{7}{10} - \frac{i}{10}.$$

Пример 3.

Вычислите: $(\sqrt{2}(\cos 10^0 + i\sin 10^0))^2 \cdot 2(\cos 40^0 + i\sin 40^0)$.

Решение: для первого комплексного числа используем формулу возведения в степень, а затем воспользуемся формулой произведения комплексных чисел:

$$2(\cos 20^0 + i\sin 20^0) \cdot 2(\cos 40^0 + i\sin 40^0) = 4(\cos 60^0 + i\sin 60^0) = 4(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2 + 2\sqrt{3}i.$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используется формула:

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Пример 3.

Решите уравнение: x^2-2x+10=0.

Решение: для решения воспользуемся обычными формулами вычисления корней квадратных уравнений:

$$a=1,\ b=-2,\ c=10,$$

$$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot10=4-40=-36.$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36\cdot(-1)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36\cdot i^2}}{2}=\frac{2\pm6i}{2}=\frac{2(1\pm3i)}{2}=1\pm3i.$$

Получили пару комплексных взаимно сопряженных корней.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 2) $4+(1+i)^3-(1-i)^3$; 3) $\frac{(2+3i)^2}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$. №2. Решите уравнение: x^2-6x+13=0.	**2 вариант** №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1+2i^{15}}{1+3i^{21}}$; 2) $(1-i)^{10}$; 3) $\frac{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{1-i^2}$. №2. Решите уравнение: x^2+3x+4=0.
4 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1-2i^{23}}{1-3i}$; 2) $5+(2+i)^2-(1-i)^3$; 3) $\frac{2\left(\cos40^0+i\sin40^0\right)}{\left(\sqrt{3}(\cos10^0+i\sin10^0)\right)}$. №2. Решите уравнение: x^2-4x+16=0.	**3 вариант** №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{3+3i}{1+i^{15}}$; 2) $4+(1+i)^3-(1-i)^3$; 3) $4\left(\cos10^0+i\sin10^0\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\cos20^0+i\sin20^0\right)$. №2. Решите уравнение: 9x^2+12x+29=0.
5 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1+2i^{11}}{1-3i^{23}}$; 2) $\frac{-\sqrt{2}+i^{45}}{i+i^{24}}$; 3) $\frac{4\left(\cos360^0+i\sin360^0\right)}{2\left(\cos60^0+i\sin60^0\right)}$. №2. Решите уравнение: 2,5x^2+x+1=0.	**6 вариант** №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1+2i}{i^9}$; 2) $\frac{\left(1-i^3\right)(2+i)}{3-i^{13}}$; 3) $3\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)\cdot2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$. №2. Решите уравнение: x^2-2x+4=0.
7 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа:	**8 вариант** №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа:

1) $2+3i+(1-i)^3$; 2) $(1+i)^{10}$; 3) $\dfrac{2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}{i^{24}-i^{2}}$. №2. Решите уравнение: x^2-4x+13=0.	1) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i^{14}}$; 2) $\dfrac{1-i}{2i^{19}}$; 3) $\dfrac{(1-2i)^2}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$. №2. Решите уравнение: 4x^2-20x+26=0.
9 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\dfrac{1+2i}{i^{17}}$; 2) $\dfrac{1-i\sqrt{2}}{1-i^{12}}$; 3) $\sqrt{2}\left(\cos120^0+i\sin120^0\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos60^0+i\sin60^0\right)$. №2. Решите уравнение: x^2-2x+26=0.	

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение алгебраической форме комплексного числа.
2. Перечислите действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме.
3. Дайте определение тригонометрической форме комплексного числа.
4. Перечислите действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

Практическое занятие № 6. Вычисление и сравнение корней

Цель практической работы:

- знать основные показательные тождества;
- знать свойства степеней с действительными показателями;
- уметь вычислять степени с действительными показателями.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.
2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1

№ 1 **.** Вычислить:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$;

Решение:

а) $\sqrt[3]{-8}$ =-$\sqrt[3]{8}=-2$; б) $\sqrt[4]{16}$ =2;

в) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{1}{2}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{3}{5}$.

№2 Решить уравнение:

а)$x^6=5$; б) $x^3=5$; в) $0,01x^3+10=0$.

Решение:

а) $x^6=5$; так как 6- четное число, то уравнение имеет два корня

$x = \pm\sqrt[6]{5}.$ Ответ: $\pm\sqrt[6]{5}$.

б) $x^3=5$; так как 3-нечетное число, то уравнение имеет один корень.

$x = \sqrt[3]{5}$. Ответ: $\sqrt[3]{5}.$

в) $0,01x^3+10=0$;

$0,01x^3=-10$;

$x^3= -\frac{10}{0,01}$;

$x^3= -\frac{10}{\frac{1}{100}}$;

$x^3=-10 \cdot \frac{100}{1}$;

$x^3=-1000$;

$x=\sqrt[3]{-1000}$;

$x=-\sqrt[3]{1000}$;

$x= -10$. Ответ :-10.

№3 Вычислить:

а) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$; б) $\frac{\sqrt[5]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; в) $\frac{2\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}}$; г) $\frac{\sqrt[3]{250}}{4\sqrt[3]{2}}$.

Решение:

а) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2 \cdot 16} = \sqrt[5]{32} = 2.$

б) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3;$

в) $\frac{2\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}}=\frac{2}{1}\cdot\sqrt[4]{\frac{48}{243}}=\frac{2}{1}\cdot\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3};$

г) $\frac{\sqrt[3]{250}}{4\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{250}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{125}=\frac{1}{4}\cdot 5=\frac{5}{4}=1,25.$

№4 Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{a^6в^3c^{12}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16x^4y^{16}}{a^8}}$ если x>0;

в) $\frac{\sqrt{567к^3}}{\sqrt{7к^{15}}}$ если к>0 ; г) $\sqrt[5]{\frac{n^4}{8m^3}}:\sqrt[5]{\frac{4m^2}{n}}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{a^6в^3c^{12}}=\sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{в^3}\cdot\sqrt[3]{c^{12}}=\sqrt[3]{\left(a^2\right)^3}\cdot\sqrt[3]{в^3}\cdot\sqrt[3]{\left(c^4\right)^3};$

так как 3- нечетное число, получим $a^2вc^4$. Ответ: $a^2вc^4$.

б) $\sqrt[4]{\frac{16x^4y^{16}}{a^8}}=\frac{\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{y^{16}}}{\sqrt[4]{a^8}}=\frac{2\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{\left(y^4\right)^4}}{\sqrt[4]{\left(a^2\right)^4}};$

Так как 4-нечетное число, то получим

$$\frac{2|x|\cdot\left|y^4\right|}{\left|a^2\right|}$$

Так как x>0 по условию, то $|x|=x;$ $y^4\geq 0$ (так как 4-четное число), следовательно $\left|y^4\right|=y^4$, аналогично рассуждая, получим $\left|a^2\right|=a^2$.

Итого получим:

$\frac{2xy^4}{a^2}.$ Ответ: $\frac{2xy^4}{a^2}.$

в) $\frac{\sqrt{567к^3}}{\sqrt{7к^{15}}}=\sqrt{\frac{567к^3}{7к^{15}}}=\sqrt{\frac{81}{к^{12}}}=\frac{9}{\sqrt{\left(к^6\right)^2}}=\frac{9}{\left|к^6\right|}$; так как к>0, то $к^6>0$, следовательно $\left|к^6\right|=к^6$.

Итого получим: $\frac{9}{к^6}$ Ответ: $\frac{9}{к^6}$.

г) $\sqrt[5]{\frac{n^4}{8m^3}} : \sqrt[5]{\frac{4m^2}{n}} = \sqrt[5]{\frac{n^4}{8m^3} \div \frac{4m^2}{n}} = \sqrt[5]{\frac{n^4}{8m^3} \cdot \frac{n}{4m^2}} = \sqrt[5]{\frac{n^5}{32m^5}} = \frac{\sqrt[5]{n^5}}{\sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{m^5}} = \frac{n}{2m}$.

Задания для самостоятельного решения .

№1 Вычислить:

а) $\sqrt[3]{-216}$; б) $\sqrt[5]{32}$; в) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$.

№2 Решите уравнение:

а) $x^3=64$; б) $x^4- 81=0$; в) $16x^4-1=0$; г) $12\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0$.

№3 Вычислить:

а) $\sqrt[3]{0{,}008 \cdot 27}$; б) $\frac{\sqrt[3]{24}}{4\sqrt[3]{2}}$; в) $\frac{5\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}}$; г) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$.

№4 Упростите выражение:

а) $\sqrt[7]{2^{14}q^{28}}$; б) $\sqrt[5]{11^5 d^{10}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{375n^2}}{\sqrt[3]{3n^{14}}}$; г) $\sqrt[4]{8x^3y^5} \cdot \sqrt[4]{2xy^7}$;

д) $\sqrt[5]{\frac{8c^2}{d}} : \sqrt[5]{\frac{d^9}{4c^3}}$; е) $\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}$.

№ Вынесите множитель из-под знака корня.

а) $\sqrt[5]{-128a^7}$; б) $\sqrt[4]{6a^{12}в^6}$.

Самостоятельная работа по теме «Корень *n*-й степени»

Вариант 1.

1. Вычислите: $а)\sqrt[5]{32}, б)0{,}7 \cdot \sqrt[4]{81}$.

2. Решите уравнения: $а)x^3 + 27 = 0, б)x^8 = 1$

Вариант 2.

1. Вычислите: $а)\sqrt[3]{64}, б)0{,}5 \cdot \sqrt[4]{81}$.

2. Решите уравнения: $а)x^4 = 16, б)x^9 + 1 = 0$.

Подведение итогов.

1. С каким математическим понятием мы сегодня познакомились – корень n–ой степени

2. Сколько корней имеет уравнение $x^n=a$, если n – нечетное число – один корень
3. Сколько корней имеет уравнение $x^n=a$, если n –четное число – зависит от а:
   если а – отрицательное, то нет корней;
   если а = 0, то один корень;
   если а – положительное, то два корня.

Практическое занятие № 7.
Вычисление степени с действительным показателем

Цель практической работы:
- обобщить понятие степени;
- отработать умение находить значение степени с действительным показателем;
- закрепить умения использовать свойства степени при упрощении выражений;
- выработать навык использования свойств степени при вычислениях.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1. Приведите примеры (выберете из выражений 5^{-2}, $9^{\frac{1}{2}}$, 43, $5^{\sqrt{2}}$) степени
– с натуральным показателем
– с целым показателем
– с рациональным показателем
– с иррациональным показателем

Задание 2. При каких значениях *а* имеет смысл выражение
an, где $n \in N$ (а – любое)
am, где $m \in Z$ ($a \neq 0$) Как от степени с отрицательным показателем перейти к степени с положительным показателем?
$a^{\frac{p}{q}}$, где $p \in Z, q \in N$ ($a > 0$)

Задание 3. Из данных выражений выберете те, которые смысла не имеют:
$(-3)^2$, $(-8)^{\frac{5}{6}}$, $(-16)^{\frac{3}{4}}$, 0^{-3}, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $(-3)^{-1}$, $0^{-\frac{1}{2}}$.

Задание 4. Вычислите. Ответы в каждом столбике обладают одним общим свойством. Укажите лишний ответ (этим свойством не обладающий)

$8^{\frac{1}{3}} = 2$ $\quad$ $5^{-2} = \frac{1}{25}$ $\quad$ $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \frac{125}{64}$

$6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{3}{4}} = 6$ $\quad$ $\left(\left(\frac{25}{4}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}$ (неправ. др.) $\quad$ $\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$(нельзя записать дес. др.)

$3^{-2} = \frac{1}{9}$ (дробь) $\quad$ $\left((2)^{\frac{1}{3}}\right)^{-6} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\left(\frac{25}{36}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$

Задание 5. Какие действия (математические операции) можно выполнять со степенями? Установите соответствие:

При умножении степеней с равными $\quad$ Основания умножаются, а показатель остаётся

основаниями	прежним
При делении степеней с равными основаниями	Основания делятся, а показатель остаётся прежним
При возведении степени в степень	Основание остаётся прежним, а показатели умножаются
При умножении степеней с равными показателями	Основание остаётся прежним, а показатели вычитаются
При делении степеней с равными показателями	Основание остаётся прежним, а показатели складываются

Один ученик записывает формулы (свойства) в общем виде.

Задание 6. Дополнить степени из п.3 так, чтобы к полученному примеру можно было применить свойства степени.

(Один человек работает у доски, остальные в тетрадях. Для проверки обменяться тетрадями, а ещё один выполняет действия на доске)

Задание 7**.** На доске (работает ученик):

Вычислите $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} =$

Самостоятельно (с проверкой на листах)

$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{8} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$

Практическое занятие № 8.
Преобразование и вычисление значений логарифмических выражений

Цель практической работы:

- Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Логарифмы»
- Закрепить и систематизировать знания по теме.
- Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1. Вычислить:

а) $9^{2\log_3 5}$;

б) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$;

в) $\dfrac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$

г) $3^{5\log_3 2}$;

д) $\frac{1}{2}\log_7 36-\log_7 14-3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

е) $\dfrac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$

Задание 2. Найти х по данному логарифму :

а) $\lg x = 2\lg 2+\lg(a+b)+\lg(a-b)$

б) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} a-\frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$

Задание 3. Прологарифмировать выражение:

а) $x = a^3b^2\sqrt{c}$

б) $x = \dfrac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}$

Задание 4. Решить уравнение:

а) $\log_9 x^2+\log_{\sqrt{3}} x = 3$

б) $\log_3 x = 9\log_{27} 8-\log_3 4$

Задание 5. При каких значениях х имеет смысл выражение:

а) $\log_6\left(49-x^2\right)$

б) $\log_7\left(x^2+x-6\right)$

Самостоятельная работа

1 вариант.

1. Вычислить:

а) $9^{2\log_3 12}$;

б) $\log_9 15+\log_9 18-\log_9 10$;

в) $\dfrac{\log_2 4+\log_2\sqrt{10}}{\log_2 20-3\log_2 2}$

2. Найти х по данному логарифму : $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a+\frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b$

3. Прологарифмировать выражение: $x = \dfrac{5a^2c^3}{b^4}$

4. Решить уравнение: $\log_2 x \ -2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$

5. При каких значениях х имеет смысл выражение: $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2+2x+7\right)$

2 вариант.

1. Вычислить:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}}2}$;

б) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;

в) $\dfrac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$

2. Найти x по данному логарифму : $\log_3 x = 3\log_3 a - 2\log_3 b + \log_3(a+b)$
3. Прологарифмировать выражение: $x = 7a^3 b\sqrt[8]{c}$
4. Решить уравнение: $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$
5. При каких значениях x имеет смысл выражение: $\log_5(x^2 - 4x + 3)$

Практическое занятие № 9- 10
Логарифм произведения, частного, степени; переход к новому основанию

Цель практической работы:

– вычислять логарифмы по любому основанию.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1. Решение типовых задач

Рассмотрим важное уточнение для четных степеней:

$$\log_{a^{2k}} b^{2r} = \frac{r}{k}\log_{|a|}|b|$$

Здесь $r, k \in Z; k \neq 0; a, b \neq 0; |a| \neq 1$

Пояснение:

Поскольку $2r$ – четное число, допускаются как положительные, так и отрицательные значения b. Аналогично допускаются как положительные, так и отрицательные значения a, за исключением ± 1. Если мы не поставим в правой части модули, то a и b будут только положительными числами, область определения сузится.

Доказательство:

Переходим к новому основанию:

$$\log_{a^{2k}} b^{2r} = \frac{\log_{|a|}|b|^{2r}}{\log_{|a|} a^{2k}} = \frac{\log_{|a|}|b|^{2r}}{2k\log_{|a|}|a|} = \frac{\log_{|a|}|b|^{2r}}{2k} = \frac{1}{2k}\log_{|a|}|b|^{2r} = \frac{2r}{2k}\log_{|a|}|b| = \frac{r}{k}\log_{|a|}|b|$$

Важно, что с помощью модуля мы сохранили неизменной область определения, не сузили ее. Так мы можем предохранить себя от многочисленных типовых ошибок.

Формула перехода к новому основанию и следствия из нее широко используются при решении различных типовых задач.

Пример 1 – вычислить:

$\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$

Преобразуем показатели степени согласно формулам перехода к новому основанию:

$\frac{1}{\log_6 5} = \log_5 6$; $\frac{1}{\log_8 7} = \log_7 8$

Получаем:

$\sqrt{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}}$

Преобразуем основания степеней:

$\sqrt{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}} = \sqrt{(5^2)^{\log_5 6} + (7^2)^{\log_7 8}}$

Применим свойство степени:

$\sqrt{(5^2)^{\log_5 6} + (7^2)^{\log_7 8}} = \sqrt{5^{2\log_5 6} + 7^{2\log_7 8}}$

В показателях степеней внесем множители под знак логарифма согласно свойству:

$\sqrt{5^{2\log_5 6} + 7^{2\log_7 8}} = \sqrt{5^{\log_5 6^2} + 7^{\log_7 8^2}} = \sqrt{5^{\log_5 36} + 7^{\log_7 64}}$

Применим основное логарифмическое тождество:

$\sqrt{5^{\log_5 36} + 7^{\log_7 64}} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

Пример 2 – решить уравнение:

$\log_2 x + \log_4 x = \log_{\sqrt[3]{4}} 3$

Приведем все три логарифма к одному основанию, например к основанию 4:

Используем формулу $\log_a b = \log_{a^r} b^r$

$\log_2 x = \log_{2^2} x^2 = \log_4 x^2 = 2\log_4 x$

$\log_{\sqrt[3]{4}} 3 = \log_{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3} 3^3 = 3\log_4 3$

В результате преобразований получили уравнение:

$2\log_4 x + \log_4 x = 3\log_4 3$

$3\log_4 x = 3\log_4 3$

Сократим тройку:

$\log_4 x = \log_4 3$

Выразим x, исходя из определения логарифма:

$x = 4^{\log_4 3}$

согласно основному логарифмическому тождеству:

$x = 3$

Итак, мы рассмотрели некоторые типовые задачи на формулу перехода к новому основанию логарифма и следствия из нее. Далее мы перейдем к изучению логарифмических уравнений.

Задание 2. Работа у доски с комментированием

1. Вычислить:

а) $\frac{\log_2 56}{\log_{28} 2} - \frac{\log_2 7}{\log_{224} 2}$; б) $\frac{\log_3 135}{\log_{45} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{1215} 3}$;

2. Вычислить:

а) $(\log_4 6 + \log_6 4 + 2)(\log_4 6 - \log_{24} 6)(\log_6 4 - \log_4 96)$;

б) $\log_6 4 + \log_6 9 + \log_4 6 \log_{\sqrt{6}} 2 - \log_6 2 \log_2 5$

3. Сравнить числа:

а) $\log_2 7$ и $\log_7 4$;

б) $\log_6 9$ и $\log_9 8$;

в) $\log_3 5$ и $\log_5 4$;

г) $\log_{11} 14$ и $\log_{14} 13$;

Задание 3. Самостоятельное решение выражений

Вариант 1

I. Вычислить:

1. $\log_{25}25 + \log_{0,2}625$
2. $\log_2\log_3 9$
3. $9 \cdot 10^{\log_{10}3}$
4. $3^{3+\log_3 6}$
5. $\dfrac{\log_9\sqrt[5]{17}}{\log_9 17}$
6. $\log_2 0,2 + \log_2 20$
7. $\log_5 7 \cdot \log_7 25$

II.Решить уравнение:

1. $\log_6(-5-x) = 3.$
2. $\log_{\frac{1}{9}}(9-x) = -2$
3. $\log_3(14-x) = \log_3 5$
4. $\log_8(x+4) = \log_8(2x-6)$
5. $\log_4(8-5x) = 2\log_4 3$
6. $\log_2(8+3x) = \log_2(3+x)+1$
7. $\log_{x-6} 9 = 2$

Вариант 2

I.Вычислить:

1. $\log_5 625 + \log_{0,05}8000$
2. $\log_3\log_3 27$
3. $8 \cdot 8^{\log_8 6}$
4. $9^{2+\log_9 6}$
5. $\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{5}$
6. $\log_6 270 - \log_6 7,5$
7. $\log_{0,4}2 \cdot \log_2 2,5$

II.Решить уравнение:

1. $\log_3(-4-x) = 1.$
2. $\log_{\frac{1}{2}}(8-2x) = -5$
3. $\log_{13}(17-x) = \log_{13}12$

4. $\log_9(x+6) = \log_9(2x-7)$
5. $\log_2(4-x) = 2\log_2 5$
6. $\log_2(8+7x) = \log_2(8+3x)+1$
7. $\log_{x+3} 16 = 4$

Практическое занятие № 11. Градусная и радианная мера угла

Цель практической работы:

- усвоить понятия “Угол поворота”, “Радианная мера угла”,
- научиться отмечать углы поворота,
- определять четверть, в которой находится угол,
- переводить углы из градусной меры в радианную и наоборот.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.
2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Начертим окружность

Центр окружности совместим с точкой О, которая является началом координат и проведём координатные оси. За единичный отрезок примем радиус окружности. Такая окружность называется единичной.

Отметим единичные отрезки и укажем координатные четверти.

Совместим с началом координат вдоль положительного направления оси OX два луча, один из которых неподвижный, а другой свободно вращается. Точку пересечения первого луча с окружностью обозначим P_o, второго – P

Длина пути, пройденного точкой P от начального положения P0, соответствует углу поворота.

Угол поворота можно измерить двумя мерами: градусной и радианной.

А) С градусной мерой угла мы знакомы. Это часть развёрнутого угла.

1° = часть развёрнутого угла.

Вспомним о мере измерения углов: 1° = 1/ 360 часть окружности (“градус” – от латинского grad – шаг).

Знаете ли вы, почему окружность разделили на 360 частей, почему не разбили на 10, 100 или 1000 частей, как это происходит, например, при измерении длин? Расскажу вам одну из версий.

Интересно знать!

Раньше люди считали, что Земля – это центр Вселенной и она неподвижна, а Солнце совершает за сутки один оборот вокруг Земли, геоцентрическая система мира, “гео” – Земля. Вавилонские жрецы, проводившие астрономические наблюдения, обнаружили, что в день равноденствия Солнце от восхода до заката описывает на небесном своде полуокружность, в которой видимый поперечник (диаметр) Солнца укладывается ровно 180 раз, 1° – след Солнца

Б) Введём ещё одну меру – радианную. Отметим на единичной окружности такой угол, длина дуги которого равна радиусу. Величина этого угла и будет равна одному радиану.

Запишем определение:

1 радиан – это центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности

Расставим на единичной окружности значения некоторых углов в градусной мере

Угол в один радиан составляет примерно 57°

Посмотрите на чертёж и прикиньте, сколько радиан включает в себя развёрнутый угол (3) Если быть точнее, то 3,14.

Что это за число? Верно, это число . Запишем сделанный вывод:

180° <----> π рад (1)

Задание 1.Устный опрос

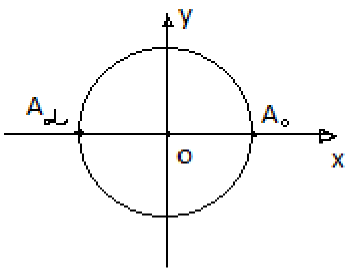
1.Какой поворот луча называется полным.

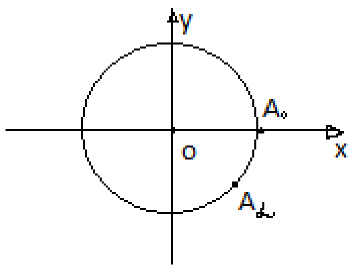
2.Если поворот луча совершён по ходу часовой стрелки, то угол поворота…

3. Если поворот луча совершён против хода часовой стрелки, то угол поворота…

4. Как называется окружность с центром в начале координат и радиусом , равным Единице.

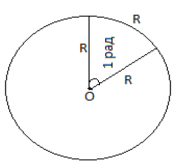
5. Назовите 3 значения α для A_α





В чём измеряются углы и дуги?

Рассмотрим ещё одну единицу измерения углов и дуг – **радиан.**



<u>Радианом</u> называется величина центрального угла , который опирается на дугу окружности длиной в один радиус. (1рад)

На дугу длиной **R** опирается угол в **1 рад**.

На дугу длиной **πR** опирается угол в **π рад**. (**πR-полуокружность)**

Градусная мера полуокружности - 180˚ .

Тогда **π рад=**180˚.

Соотношение градуса и радиана:

$$1^o = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \qquad\qquad 1 \text{ рад} = \frac{180^o}{\pi}$$

где π ≈ 3,14 где π ≈ 3,14

1рад ≈ 57,3˚ 1˚ ≈ 0,02 рад

Формулы

Перевод из градусов в радианы Перевод из радиан в градусы

$$\boldsymbol{x^o = x \cdot \frac{\pi}{180}} \qquad\qquad \boldsymbol{x \text{ рад} = x \cdot \frac{180^o}{\pi}}$$

где π ≈ 3,14 **где π ≈ 3,14**

Пример 1 (как выразить градусы в радианах):

$$35^o = 35 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{35\,\pi}{180} \text{ рад} = \frac{7\ \pi}{36} \text{ рад.}$$

$$72^o = 72 \cdot \frac{\pi}{180} \text{рад} = \frac{2\,\pi}{5} \text{рад} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{5} \approx 1{,}3 \text{ рад.}$$

Пример 2 (как выразить радианы в градусах):

$$\frac{2\pi}{3} \text{ рад} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180^o}{\pi} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{3} = 120^o$$

$$3{,}5 \text{ рад} = 3{,}5 \cdot \frac{180^o}{\pi} = \frac{630^o}{3{,}14} \approx 200{,}5^o$$

Задание 2. Работа у доски

1. Определить, в какой четверти находятся углы. α= 25°, β= – 100°, γ = 220°, φ = 460°

2. Перевести из радианной меры в градусную: 5π; 1,5π; 0, 2π

перевести из градусной меры в радианную: 315°; 210°; 120°

Задание 3. Работа по вариантам на листиках

Вариант №1	**Вариант №2**
1. Переведите данные числа из радианной	1. Переведите данные числа из радианной

меры в градусную: $75°$; $10°$; $144°$; $1080°$.	меры в градусную: $15°$; $18°$; $108°$; $720°$.
2. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{5}; \frac{5\pi}{18}; \frac{11\pi}{2}$.	2. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{18}; \frac{7\pi}{10}; \frac{13\pi}{4}$.
Вариант №3	**Вариант №4**
1. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $20°$; $36°$; $250°$; $900°$.	1. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $40°$; $72°$; $320°$; $1200°$.
2. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{10}; \frac{8\pi}{15}; \frac{5\pi}{12}$.	2. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{15}; \frac{3\pi}{5}; \frac{7\pi}{18}$.

Вариант 1.	Вариант 2.
1. Выразите в радианной мере углы	
135°, 250°, 90°, 45°	36°, 330°, 60°, 180°.
2. Найдите градусную меру угла:	
$\frac{\pi}{4}$; $\frac{2}{3}\pi$; π; $\frac{4}{9}\pi$	$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{4}\pi$; 2π; $\frac{2}{9}\pi$
3. Найдите длину дуги, если угол $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ рад, а радиус равен 4.	3. Найдите площадь сектора, если радиус круга равен 4, а угол сектора $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ рад.
4. Конец минутной стрелки часов движется по окружности радиуса 2 см. Какой путь проходит конец этой стрелки за 20 мин.	

Практическое занятие № 12.
Тригонометрические функции числового аргумента

Цель практической работы:

- формирование понятия тригонометрических функций числового аргумента;
- изучение значений тригонометрических функций некоторых чисел (углов),
- изменения знаков тригонометрических функций в координатных четвертях.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1. Решения упражнений.

1. Вычислите в радианной мере углы:

а) 5°; б) 1140°; в) -765°; г) 67° 5'.

Ответ: а) ; б) π; в) π; г) $\frac{3\pi}{8}$.

2. Вычислите в градусной мере углы:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) 1,25π; в) 1; г) 10.

Ответ: а) 105°; б) 225°; в) 57,32°; г) 573,25°.

3. Найдите длину дуги, если на нее опирается центральный угол α = , а радиус окружности равен 10 м.

Ответ: 9π м.

II. Восприятие и осознание понятий синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат, которое называется единичным (рис. 43). Обозначим точку Ро — правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу α точку круга по следующим правилом:

1) Если α > 0, то, двигаясь по окружности из точки Ро в направлении против часовой стрелки (положительный направление обхода окружности), опишем по окружности путь длиной а, конечная точка этого пути и будет шуканою точкой Рα.

2) Если α < 0, то, двигаясь из точки Ро (рис. 44) в направлении по часовой стрелке, опишем по окружности путь длиной |α|; конец этого пути и будет искомая точка Ра.

3) Если α = 0, то поставим в соответствие точку Ро.

Таким образом, каждому действительному числу можно поставить в соответствие точку Р0 единичного круга.

Если α = αа + 2πk, где k — целое число, то при повороте на угол α получаем одну и ту же точку, что и при повороте на угол ао.

Если точка Р соответствует числу α, то она соответствует и всем числам вида α +2πk, где 2π — длина окружности (так как радиус равен 1), а k — целое число, показывающее количество полных обходов окружности в ту или другую сторону.

Задание 2. Выполнение упражнений

1. Каким числам соответствуют точки Р0, Р, М, K, L, S (рис. 45), если известно, что N — середина дуги Р0K, а дуги Р0Р, РМ, МK — уровне.

Ответ: 2πn; $\frac{\pi}{6}$ +2πn; $\frac{\pi}{4}$ +2πn; $\frac{\pi}{3}$ + 2πn; $\frac{\pi}{2}$ + 2πn; π + 2πn; -$\frac{\pi}{2}$ + 2πn, n $\in$ Z.

2. Отметьте на одиночном круге точки, которые соответствуют числам:

а) $\frac{\pi}{4}$ + 2πn , -$\frac{\pi}{4}$ + 2πn, $\frac{3\pi}{4}$ + 2πn, -$\frac{3\pi}{4}$ + 2πn, где n $\in$ Z;

б) $\frac{\pi}{6}$ + 2πn , $\frac{\pi}{3}$ + 2πn , $\frac{2\pi}{3}$ + 2πn, $\frac{5\pi}{6}$ + 2πn, -$\frac{2\pi}{3}$ + 2πn, где n $\in$ Z.

Ответ: а) рис. 46 (каждая четверть круга разделена на 2 равные части); б) рис. 47 (каждая четверть круга разделена на 3 равные части).

3. Отметьте на одиночном круге точки, которые соответствуют числам 1; 2; 3;-5. Ответ: рис. 48.

Синусом числа α называется ордината точки Pa, образованной поворотом точки Pa (1; 0) вокруг начала координат на угол в α радиан (обозначается sin α) (рис. 49).

Синус определен для любого числа α.

Косинусом числа α называется абсцисса точки Pa, образованной поворотом точки Pa (1; 0) вокруг начала координат на угол в α радиан (обозначается cos α) (рис. 49).

Косинус определен для любого числа α.

Задание 3. Выполнение упражнений

1. Вычислите:

а) cos 7π; б) sin 7π;

Ответ: а) -1; б) 0;

2. Вычислите:

а) sin π + sin 1,5π; б) cos0 + cos 3,5π - cos 3π.

Ответ: а) -1; б) 2.

Тангенсом числа α называется отношение синуса числа α к его косинуса: .

Тангенс определен для всех а, кроме тех значений, для которых cos α = 0, то есть α = $\frac{\pi}{2}$ + πn, n $\in$ Z.

Для решения некоторых задач полезно иметь представление о линии тангенсов.

Проведем касательную t к единичного круга в точке Pe. Пусть α — произвольное число, для которого cos α 0, тогда точка Pa (cos α; sin α) не лежит на оси ординат и прямая OPa пересекает t в некоторой точке И с абсциссой 1. Найдем ординату точки с треугольника OPoTa.

Таким образом, ордината точки пересечения прямых OPa и t равен тангенсу числа α. Поэтому прямую t называют осью тангенсов.

Котангенсом числа α называется отношение косинуса числа α к его синусу: .

Котангенс определен для всех α, кроме таких значений, для которых sin α 23" /> 0, то есть a = πn, n $\in$ Z.

Введем понятие линии котангенсов. Проведем касательную q до единичного круга в точке . Для произвольного числа α, если sin α 0 и соответственно точка Pα (cos α, sin α) не лежит на оси OX и поэтому прямая OPαпересекает прямую q в некото

рой точке Qα с ординатой, равной 1. Из треугольника O Qα имеем: , отсюда x = ctg α. Таким образом, абсцисса точки пересечения прямой OPa и q равен котангенсу числа α, поэтому прямую q называют осью котангенсів.

Задание 4. Выполнение упражнений

1. Вычислите: а) tg π; б) tg (-π); в) tg 4π; г) tg $\frac{3\pi}{2}$.
Ответ: а) 0; б) 0; в) 0; г) не определен.

2. Определите знак числа: а) tg $\frac{3\pi}{4}$;
Ответ: а) минус;

III. Определение значений тригонометрических функций некоторых чисел

За то что поворот на угол в α радиан совпадает с поворотом на угол 180 —αградусов, аргумент синуса и косинуса можно выразить как в градусах так и в радианах. Например, при повороте точки (1; 0) на угол $\frac{\pi}{2}$, то есть на угол 90º, поэтому sin $\frac{\pi}{2}$ = sin 90° = 1, cos $\frac{\pi}{2}$ = cos 90° = 0.

Заполним таблицу значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых чисел (таблица 4) или рассмотрим таблицу 2 (стр. 31) учебнику и выполним упражнение 1.

Таблица 4

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0		1	$\sqrt{3}$	не ипн.	0	не ипн.	0
ctg α	не ипн.	$\sqrt{3}$	1		0	не ипн.	0	не ипн.

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса других чисел можно найти с помощью математических таблиц или калькулятора.

Задание 5. Выполнение упражнений

1. Вычислите:

а) 3sin $\frac{\pi}{6}$ + 2cos $\frac{\pi}{6}$ – tg $\frac{\pi}{3}$;

б) 5sin $\frac{\pi}{4}$ +3tg $\frac{\pi}{4}$ – 5cos $\frac{\pi}{4}$ – 10ctg $\frac{\pi}{4}$;

в) sin $\frac{\pi}{3}$ · cos $\frac{\pi}{6}$ – tg $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{3}{2}$; б)-7; в) $-\frac{1}{4}$.

2. Вычислите с помощью микрокалькулятора: а) sin 1,5; б) cos 0,5; в) ctg $\frac{\pi}{9}$.
Ответ: а) 1,00; б) 0,88; в) 2,75.

IV. Изучение изменения знаков тригонометрических функций

Число sin α — это ордината соответствующей точки Pa, поэтому sin α > 0, если точка расположена выше оси абсцисс, то есть в і И II четвертях (рис. 52). Если эта точка лежит ниже оси абсцисс, то ее ордината отрицательная в третьей и четвертой четвертях.

Число cos α — это абсцисса точки Pa, поэтому cos α > 0 в і И IV четвертях, cos α < 0 в II и III четвертях

Задание 6. Выполнение упражнений

1. В какой четверти находится точка Pα, если:
а) sin α > 0 и cos α > 0;
б) sin α > 0 и cos α < 0;
в) sin α < 0 и cos α > 0;
г) sin α < 0 и cos α < 0?
Ответ: а) И; б) II; в) IV; г) III.

2. Какой четверти принадлежит Pa, если:
а) sin α cos α > 0;
б) sin α cos α < 0;
в) tg α cos α > 0;
г) ctg α sin α < 0?
Ответ: а) і или III; 6) II или IV; в) і или II; г) II или III.

3. Определите знак выражения:
а) sin105° – cos105°; б) cos155° – sin255°;
в) tg127° · ctg200°; г) tg351° · ctg220°.
Ответ: а) минус; б) плюс; в) минус; г) минус.

4. Определите знак произведения:
а) tg 2 · tg 3 · ctg 3 · cos 1; б) sin 1 · cos 2 · tg 3 · ctg 4.
Ответ: а) минус; б) плюс.

Практическое занятие № 13.
Основные тригонометрические тождества

Цель практической работы:

– использование тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1. Доказать тождество:

а) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$ б) $\cos^4 z-\sin^4 z=\cos 2z$

в) $2\cos^2 z-\cos 2z=1$ г) $\sin 2z=(\sin z+\cos z)^2-1$

Задание 2. Упростить выражение:

а) $\sin(\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(-\beta)$; б) $\sin 2\alpha+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

в) $\dfrac{2(\cos z+\cos 3z)}{2\sin 2z+\sin 4z}$ г) $\cos z\cdot tgz-2\sin z$

Задание 3. Вычислить:

$\cos(\alpha-\beta)$**,** если $\cos\alpha=-0{,}8$; $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,

$\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$;

$\sin 2z, если \sin z=\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2}<z<2\pi$

Задание 4. Используя формулы приведения , вычислить:

1) cos 780º ; 2) $\sin\frac{13}{6}\pi$ 3) sin 780º ; 4) $\cos\frac{13}{6}\pi$

Задание 5. Какие значения может принимать:

1) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ 2) $\cos z, если \sin z=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Сведения из теории:

Основные формулы тригонометрии

Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса следуют *основные тригонометрические тождества*:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$;

$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; $ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Основой для остальных формул являются *формулы сложения*:

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;

$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$; $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$.

Из формул сложения, полагая $\beta = \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbf{Z}$, получаем *формулы приведения* преобразования выражений вида:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ \cos\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ n \in \mathbf{Z}.$$

Для запоминания этих формул удобно пользоваться мнемоническим правилом:

1. Перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в соответствующей координатной четверти:

2. Функция меняется на «кофункцию», если n нечетно; функция не меняется, если n четно. (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс, тангенс).

Пример 1.

Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,4 и 0,7.

Решение:

используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, имеем:

$$0{,}4^2+0{,}7^2=0{,}16+0{,}49=0{,}65.$$

Т.к. $0{,}65\neq1$ значения синуса и косинуса одного и того же числа не могут быть равными соответственно: 0,4 и 0,7.

Пример 2.

Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin\alpha=-0{,}8$ и $\pi<\alpha<1{,}5\pi$.

Решение:

используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, имеем:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,\ \text{тогда}\ \cos^2\alpha=1-(-0{,}8)^2=1-0{,}64=0{,}36.$$

Т. к. $\pi<\alpha<1{,}5\pi$ (III координатная четверть), то $\cos\alpha=-0{,}6$.

По формуле $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ вычисляем $tg\alpha = \frac{-0{,}8}{-0{,}6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

По формуле $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$ вычисляем $\mathrm{ctg}\alpha=1.\frac{3}{4}=\frac{4}{3}$:

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,5 и 0,5. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.	1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,2 и -0,8. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.	1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,6 и -0,8. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos\alpha=\frac{15}{17}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

4 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{7}{25}$ и $\frac{24}{25}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: sinα=0,5 и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.	**5 вариант** 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: cosα=0,4 и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.	**6 вариант** 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: sinα=$\frac{\sqrt{3}}{5}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.
7 вариант 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{5}{3}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: cosα=$\frac{\sqrt{2}}{5}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.	**8 вариант** 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: 2,4 и $-\frac{5}{12}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: sinα=0,7 и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.	**9 вариант** 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: cosα=0,9 и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные тригонометрические тождества.
2. Сформулируйте мнемоническое правило тригонометрических функций?

Практическое занятие № 14.
Решение тригонометрических уравнений

Цель практической работы:

– знать формулы для решения тригонометрических уравнений в общем виде и частные случаи решения;

– решать простейшие тригонометрические уравнения.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Сведения из теории:

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение $\cos t=a$

Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение $\cos t=a$ не имеет решений, т.к. $|\cos t|\le 1$ для любого t.

Пусть $|a|\le 1$. Надо найти все такие числа t, что $\cos t=a$. На отрезке $[0;\pi]$ существует только одно решение уравнения $\cos t=a$ – это число $\arccos a$.

Косинус – четная функция, и, значит на отрезке $[-\pi;\ 0]$ уравнение также имеет единственное решение – это число $-\arccos a$.

Итак, уравнение $\cos t=a$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ длиной 2π имеет два решения $t=\pm\arccos a$ (совпадающие при $a=1$).

Вследствие периодичности функции косинус все остальные решения отличаются от найденных на $2\pi n$, ($n\in\mathbf{Z}$), т.е. формула корней уравнения $\cos t=a$ имеет вид:

$$t=\pm\arccos a+2\pi n,\ (n\in\mathbf{Z}).$$

Пример 1.

Решите уравнение: $\cos t=1/2$.

Решение:

по формуле $t=\pm\arccos(1/2)+2\pi n,\ (n\in\mathbf{Z})$.

Поскольку $\arccos(1/2)=\pi/3$ приходим к ответу $t=\pm\pi/3+2\pi n,\ (n\in\mathbf{Z})$.

Пример 2.

Решите уравнение: $\cos t=-0{,}2756$.

Решение:

по формуле $t=\pm\arccos(-0{,}2756)+2\pi n,\ (n\in\mathbf{Z})$.

Значение $\arccos(-0{,}2756)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,85. Итак, приходим к ответу $t=\pm 1{,}85+2\pi n,\ (n\in\mathbf{Z})$.

Пример 3.

Решите уравнение: $\cos(2x-\pi/4)=1/2$.

Решение:

по формуле $2x-\pi/4=\pm\arccos(1/2)+2\pi n,\ (n\in\mathbf{Z})$.Поскольку $\arccos(1/2)=\pi/3$ получаем

$2x-\pi/4=\pm\pi/3+2\pi n,\ (n\in\mathbf{Z})$

$2x=\pi/4\pm\pi/3+2\pi n,\ (n\in\mathbf{Z})$.

Разделив обе части уравнения на 2 получим ответ: $x=\pi/8\pm\pi/6+\pi n,\ (n\in\mathbf{Z})$.

Уравнение $\sin t=a$

Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение $\sin t=a$ не имеет решений, т.к. $|\sin t|\le 1$ для любого t.

При $|a|\le 1$ на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$ уравнение $\sin t=a$ имеет одно решение $t_1=\arcsin a$. На отрезке $[\pi/2;\ 3\pi/2]$ функция синус убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение и на этом отрезке имеет одно решение.

Это решение есть число $t_2=\pi-\arcsin a$, т.к. $\sin t_2=\sin(\pi-t_1)=\sin t_1=a$.

Кроме того, поскольку $-\pi/2\le t_1\le\pi/2$,

имеем $-\pi/2\le -t_1\le\pi/2$

и $\pi-\pi/2 \le \pi-t_1 \le \pi+\pi/2$,

т.е. $\pi/2 \le t_2 \le 3\pi/2$, $t_2 \in [\pi/2; 3\pi/2]$.

Итак, уравнение *sin t=a* на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ имеет два решения $t_1=\arcsin a$ и $t_2=\pi-\arcsin a$ (совпадающие при a=1). Учитывая, что период синуса равен 2π, получаем формулу для решения уравнения *sin t=a*:

$$t=(-1)^k \arcsin a+\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 4.

Решите уравнение: $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

по формуле $t=(-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Поскольку $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi/4$ приходим к ответу $t=(-1)^k\ \pi/4+\pi k$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Пример 5.

Решите уравнение: $\sin t=0{,}3714$.

Решение:

по формуле $t=(-1)^k \arcsin(0{,}3714)+\pi k$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Значение *arcsin* (0,3714) находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 0,3805. Итак, приходим $t= (-1)^k 0{,}3805+\pi k$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Пример 6.

Решите уравнение: $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

функция синус нечетная, поэтому $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда по формуле: $\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Т.к. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, имеем

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,\ (k \in \mathbf{Z})$$

или

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{10}+(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,\ (k \in \mathbf{Z}).$$

Умножив обе части уравнения на 2, получим ответ:

$$x=\frac{\pi}{5}+(-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k,\ (k \in \mathbf{Z}).$$

Уравнение tg x=a

При любом *a* на интервале ($-\pi/2$; $\pi/2$) существует одно число *t* , что *tgt=a*, – это *arctg a*. Поэтому уравнение *tg x=a* имеет на интервале ($-\pi/2$; $\pi/2$) длиной π единственный корень.

Функция тангенс имеет период π. Следовательно, остальные корни уравнения *tg t=a* отличаются от найденного на *πn*, (*n* Є **Z**), т.е.

$$t=arctg\ a+\pi n,\ (n \in \mathbf{Z}).$$

Пример 7.

Решите уравнение: *tg t*= $\sqrt{3}$.

Решение:

по формуле $t=arctg(\sqrt{3})+\pi n$, (*n* Є **Z**).

Поскольку $arctg(\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$ приходим к ответу $t=\dfrac{\pi}{3}+\pi n$, (*n* Є **Z**).

Пример 8.

Решите уравнение: *tg t*=5,177.

Решение:

по формуле *t=arctg*(5,177)+π*n*, (*n* Є **Z**).

Значение *arctg*(5,177) находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,38.

Итак, приходим *t*=1,38+π*n*, (*n* Є **Z**).

Сводная таблица решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Решение
sin*x*=*a*	$x=(-1)^k \arcsin a+\pi k, k \in Z$
cos*x*=*a*	$x=\pm \arccos a+2\pi k, k \in Z$
tg*x*=*a*	$x=arctga+\pi k, k \in Z$
ctg*x*=*a*	$x=arcctga+\pi k, k \in Z$

Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Частные случаи		
	a=-1	*a*=0	*a*=1
sin*x*=*a*	$x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k \in Z$	$x=\pi k, k \in Z$	$x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k \in Z$
cos*x*=*a*	$x=\pi+2\pi k, k \in Z$	$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$	$x=2\pi k, k \in Z$
tg*x*=*a*	$x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$	$x=\pi k, k \in Z$	$x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$
ctg*x*=*a*	$x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi k, k \in Z$	$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$	$x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$

Задания для самостоятельного решения:

Решите уравнения:

1 вариант 1) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$; 2) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; 3) $tg2x=\sqrt{3}$.	**2 вариант** 1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $tg2x=-\sqrt{3}$.	**3 вариант** 1) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; 2) $2\cos x=\sqrt{2}$; 3) $tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
4 вариант 1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{4}=\frac{4}{5}$; 3) $tg\left(2x-\frac{\pi}{10}\right)=0$.	**5 вариант** 1) $\sin x=\frac{3}{5}$; 2) $\cos(1-x)=\frac{1}{2}$; 3) $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=3$.	**6 вариант** 1) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; 2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$; 3) $ctg\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$.
7 вариант 1) $2\sin x=-\sqrt{2}$; 2) $\cos 3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $3tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$.	**8 вариант** 1) $2\sin 2x=-1$; 2) $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$; 3) $ctg\frac{x}{2}=\sqrt{3}$.	**9 вариант** 1) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$; 2) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $ctg\left(2x+45^0\right)=-1$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в общем виде.

2. Перечислите формулы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить неравенства

1. $\mathrm{tg}^3x + \mathrm{tg}^2x - \mathrm{tg}x - 1 > 0$.
2. $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x \leq 2$.
3. $\sin 2x < \cos x$.
4. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x \geq 0$.
5. $6\sin^2x - 5\sin x + 1 > 0$.
6. $\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{\sin x-1}<0.$
7. $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\leq 0.$
8. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)<-\sqrt{3}.$
9. $2\sin^2x + 9\cos x - 6 \geq 0$.
10. $\frac{\sin x}{1+\cos x}\geq 0.$
11. $4\sin x\cos x-\sqrt{2}<2(\sqrt{2}\cos x-\sin x).$
12. $\cos 2x + \sin x \geq 0$.

Практическое занятие № 15.

Тригонометрические неравенства

Цель практической работы:

– Закрепить навыки определения типов тригонометрических уравнений (простейшее, квадратное относительно $\sin x,\ \cos x,\ tgx$, однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$, уравнение, решаемое разложением на множители левой части).

– Усвоить алгоритмы решения основных типов тригонометрических уравнений и простейших тригонометрических неравенств.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1. Ответить на контрольные вопросы:

а) Дайте определения арксинуса, арккосинуса арктангенса и арккотангенса числа *а*.

б) Перечислите свойства обратных тригонометрических функций.

в) Вспомните формулы, с помощью которых решают простейшие тригонометрические уравнения.

г) Какой вид имеет квадратное относительно $\sin x,\ \cos x,\ tgx$ тригонометрическое уравнение? Объясните алгоритм его решения.

д) Какой вид имеет однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$ тригонометрическое уравнение? Какова методика его решения?

е) Вспомните формулы, с помощью которых решают простейшие тригонометрические уравнения.

1. По образцу выполнить тренировочные задания.
2. Изучить условие задания для самостоятельной работы.
3. Оформить отчет о работе.

Пример 1. Вычислите: $2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+arcctg1$.

Решение.

$$2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+arcctg1=$$

$$=-2\arcsin\frac{1}{2}+\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)+arctg1=-2\cdot\frac{\pi}{6}+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}.$$

Задания 2.

Вычислите:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$; б) $\cos(arctg1)$; в) $3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+arctg(-1)$; г) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Пример 2. Решите уравнение: $sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-1$.

Решение.

По формуле частного случая:

$\frac{\pi}{4}-x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -x=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ x=\frac{3\pi}{4}-2\pi n,\ n\in Z$.

Пример 3. Решите уравнение: $2cos\,3x=-\sqrt{2}$.

Решение.

Разделим левую и правую части уравнения на 2: $cos\,3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

По формуле $t=\pm arccos\,a+2\pi n$ получаем:

$3x=\pm arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n,\ 3x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi n,\ 3x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$.

Разделим левую и правую части уравнения на 3: $x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$.

Пример 4. Решите уравнение: $3tg\frac{5}{3}x-1=0$.

Решение.

Выразим $tg\frac{5}{3}x$: $3tg\frac{5}{3}x=1,\ tg\frac{5}{3}x=\frac{1}{3}$.

По формуле $t=arctga+\pi n$ получаем: $\frac{5}{3}x=arctg\frac{1}{3}+\pi n$.

Разделим левую и правую части уравнения на $\frac{5}{3}$: $x=\frac{3}{5}arctg\frac{1}{3}+\frac{3\pi n}{5},\ n\in Z$.

Задания для самоконтроля

Решите уравнения:

а) $2\,sin\,3x=-1$;

б) $-2\,cos\left(-\frac{x}{2}\right)=1$;

в) $\sqrt{3}tg\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$.

Практическая работа

Вариант 1

1.Решить уравнения:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

б)

в) $tg2x\cdot cosx=0$

г) $sin^2x+2sinxcosx-3cos^2x=0$

2.Решить неравенство: sinx >

Вариант 2

1.Решить уравнения:

а) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{2}=0$

б)

в) $tgx \cdot cos2x = 0$

г) $sin^2x - 4sinxcosx + 3cos^2x = 0$

2.Решить неравенство cosx <0,5

Вариант 3

1.Решить уравнения:

а) $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}$

б) $6\cos^2x + cosx - 1 = 0$

в) $sin^2x + 4sinxcosx - 5cos^2x = 0$

2.Решить неравенство sinx >0

Вариант 4

1.Решить уравнения:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos\frac{\pi}{6}$

$sin^2x - 4sinxcosx - 5cos^2x = 0$

2.Решить неравенство cos x <0

Практическое занятие № 16.
Построение графиков тригонометрических функций с помощью тригонометрических преобразований

Цель практической работы:

– уметь строить графики тригонометрических функций с помощью тригонометрических преобразований.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

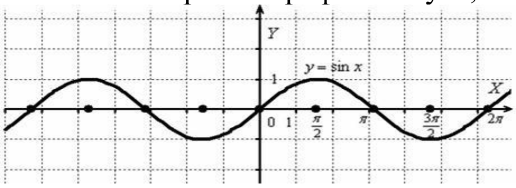
Содержание и последовательность выполнения заданий

Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $k>1$, нужно график функции $f(x)$ **сжать к оси** OY в k раз.

Пример 1

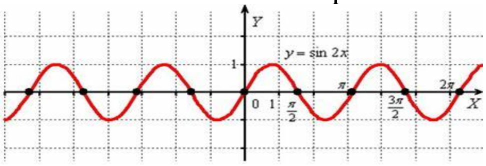
Построить график функции $y=\sin 2x$.

Сначала изобразим график синуса, его период равен $T = 2\pi$:



К слову, чертить графики тригонометрических функций вручную – занятие кропотливое, поскольку $\pi \approx 3{,}14, \quad \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57, \quad 2\pi \approx 6{,}28$ и т.д., то есть на стандартной клетчатой бумаге аккуратным нужно быть вплоть до миллиметра, даже до полумиллиметра. Впрочем, многие с этим уже столкнулись.

Теперь поиграем на бесконечно длинном баяне. Мысленно возьмём синусоиду в руки и сожмём её **к оси** OY в 2 раза:



То есть, график функции $y = \sin 2x$ получается путём сжатия графика $y = \sin x$ к оси ординат в два раза. Логично, что период итоговой функции тоже уполовинился: $T = \pi$

В целях самоконтроля можно взять 2-3 значения «икс» и устно либо на черновике выполнить подстановку:

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

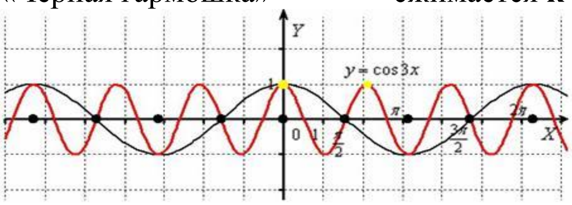
$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi = 0$$

Смотрим на чертёж, и видим, что это действительно так.

Пример 2

Построить график функции $y = \cos 3x$

«Чёрная гармошка» $y = \cos x$ сжимается **к оси** OY в 3 раза:



Итоговый график $y = \cos 3x$ проведён красным цветом.

Исходный период $T = 2\pi$ косинуса закономерно уменьшается в три раза: $T = \frac{2\pi}{3}$ (отграничен жёлтыми точками).

Растяжение графика функции от оси ординат

Это противоположное действие, теперь баян не сжимается, а растягивается.

Случай имеет место, когда АРГУМЕНТ функции умножается на число $0 < k < 1$.

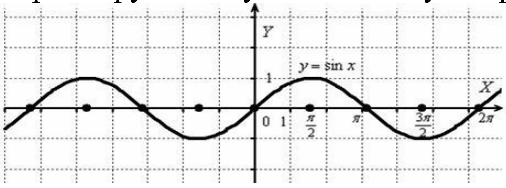
Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $0 < k < 1$, нужно график функции $f(x)$ **растянуть от оси** OY в $\frac{1}{k}$ раз.

Продолжим мучить синус:

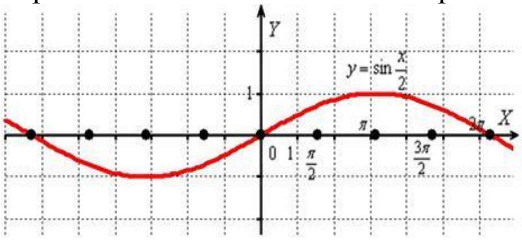
Пример 3

Построить график функции $y = \sin\frac{x}{2}$

Берём в руки нашу «бесконечную гармошку»:



И растягиваем её **от оси** OY в 2 раза:



То есть, график функции $y = \sin\frac{x}{2}$ получается путём **растяжения** графика $y = \sin x$ **от оси ординат** в два раза. Период итоговой функции увеличивается в 2 раза: $T = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$, он толком даже не вместился на данный чертёж.

Операции сжатия/растяжения графиков, разумеется, выполнимы не только для тригонометрических функций.

Применение знаний к решению задач.

1 вариант

1. Построить графики функций.

а) $y = \cos 2x$ в) $y = \cos x - 1$

б) $y = tg\frac{x}{2}$ г) $y = |\sin x|$

2. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$: $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

2 вариант

1. Построить графики функций.

а) $y = \cos\frac{x}{2}$ в) $y = 2 + \sin x$

б) $y = tg 2x$ г) $y = |\cos x|$

2. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$: $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

3 вариант

1. Построить графики функций.

а) $y = \sin\frac{x}{2}$ в) $y = \sin x + 1$

б) $y = tg 4x$ г) $y = 2\cos x$

2. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку [0; 3π] : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку [0; 3π] : $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

4 вариант

1. Построить графики функций.

а) $y = \cos\frac{x}{2}$ в) $y = 2\sin x$

б) $y = ctg\frac{x}{2}$ г) $y = \sin x - 1$

2. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку [0; 3π] : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку [0; 3π] : $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Практическое занятие № 17.
Функции. Область определения и множество значений функции

Цель практической работы:

1. Закрепить определения функции, области определения функции и графика функции.
2. Обогатить опыт учащихся в получении новых знаний на основе уже имеющихся теоретических знаний, а также через использование знакомых ситуаций практического характера.
3. Развивать логическое мышление учащихся через формирование строить графики функций.
4. Воспитывать графическую культуру учащихся.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1. Устный фронтальный опрос:

1. **Что же такое функция?**

Определение 1. Если даны числовое множество X и правило f , позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что задана **функция y = f (x) с областью определения X.**

2. **Как записывают?**

Пишут : y = f(x), x Є X.

3. **Как обозначают область определения?**

Для области определения функции используют обозначение D (f).

4. **Как обозначают множество значений?**

Множество всех значений функции y = f (x) называют областью значений функции и обозначают E (f).

5. **Как называют переменную x?**

X – независимая переменная или аргумент.

6. **Как называют переменную у?**

У – зависимая переменная.

7. **Что такое график функции?**

Определение 2. Если дана функция $y = f(x)$, $x \in X$ и на координатной плоскости xOy отмечены все точки вида (x; y), где $x \in X$, а $y = f(x)$, то множество этих точек называют графиком функции.

Задание 2. Найдите область определения функций:

$y = \sqrt{x}$ $(D(f) = [0; \infty))$

$y = x^2$ $(D(f) = (-\infty; +\infty))$

$y = x / (x+2)$ $(D(f) = (-\infty; -2) \cap (-2; +\infty))$

$y = (5-3x)/(\sqrt{x+3})$ $(D(f) = (-3; +\infty))$

Задание 3.

Вычислите значения данных функций в точках 1 и 4.

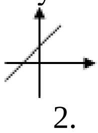
1. x=1, y=1
2. x=4, y=2
3. x=1, y=1
4. x=4, y=16
5. x=1, y=1/3
6. x=4, y=2/3
7. x=1, y=1
8. x=4, $y=-7/\sqrt{7}$

Задание 4.

Как выглядят графики некоторых функций?

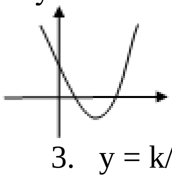
1. $y = kx+m$

$y = kx+m$ – прямая



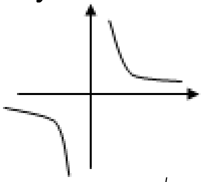
2. $y = ax^2 +bx +c$

$y = ax^2 +bx +c$ – парабола

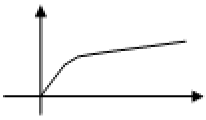


3. $y = k/x$

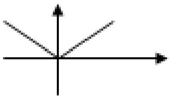
у = к/х – гипербола



4. у = √х



5. у = IхI



Закрепление.
Задание 4.
Дана функция у = f(х), где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } -2 \le x \le 0, \\ \surd x+1, & \text{если } 0 < x \le 3. \\ 3/x + 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

1. Вычислить:
   а) f(-2);
   б) f (0);
   в) f(1, 25);
   г) f(6).
2. Найти D (f) и Е(f).
3. Выяснить, сколько корней имеет уравнение f(х) =а при различных значениях а.
4. Решить неравенства:
   а) f(х) < 0,5;
   б) f(х) > 0,5.

Решение.
Дана кусочная функция.
1.
а) значение х=-2 удовлетворяет условию $-2 \le x \le 0$, значит f(-2) надо вычислять по формуле f(х) =- x^2; f(-2) = $-(-2)^2$ ==-4.
б) значение х =0 удовлетворяет условию $-2 \le x \le 0$, значит f (0) надо вычислять по формуле f(х) =- x^2; f (0) =-0^2 =0.
в) значение f(1, 25) удовлетворяет условию $0 < x \le 3$, значит f(1, 25) надо вычислять по формуле f(х) = √х+1; f(1, 25)= √1,25 +1 =1,5.
г) значение f(6) удовлетворяет условию х > 3, значит f(6) надо вычислять по формуле 3/х +1
f(6)=3:х +1= 3:6+1=1,5.

2. Область определения D (f) состоит из трех промежутков: [-2;0], (0;3], (3; +∞). Объединив их, получим луч [-2; +∞).
Чтобы найти область значений функции, построим ее график. Он состоит из трех кусочков заданной функции. Спроецировав этот график на ось у, получим область значений функции. E(f)= [-4; 0]U(1; 2]

3. Выясним, сколько корней имеет уравнение f(x) =a при различных значениях a.
Для этого нужно определить, сколько точек пересечения имеет построенный график функции с прямой у=а при различных значениях параметра а.

1. При -4 ≤ a≤ 0 прямая пересекается с графиком в одной точке. Значит, уравнение имеет 1 корень.
2. При a< -4 корней нет.
3. При 0<a ≤1 корней нет.
4. При a>2 корней нет.
5. При а=2 – 1 корень.
6. При 1<a <2 два корня.

4. Решим неравенство f(x)<0, 5. График функции располагается ниже прямой y = 0,5 при -2≤x≤0
f(x)>0,5 при x>0.

Контрольные вопросы:

1. Какое соответствие называется функцией?
2. Что такое область определения X функции?
3. Дайте определение графика функции.

Практическое занятие № 18.
Промежутки возрастания, убывания, наибольшее, наименьшее значения функции. Точки экстремума

Цель практической работы:

знать:

- определения возрастающей (убывающей) функции;
- определения точки максимума (минимума) функции;

уметь:

находить промежутки монотонности функции;

- вычислять точки экстремума функции.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Сведения из теории:

Возрастание и убывание функций

Функция f возрастает на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.
Функция f убывает на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)<f(x_1)$.
Иными словами, функция f называется возрастающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция f называется убывающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.

Пример 1.
Докажите, что функция $f(x)=1/x$ является убывающей.
Решение:
область определения функции: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Рассмотрим поведение функции на каждом интервале:
$(-\infty; 0)$: $x_1=-8$, $x_2=-4$, т.е. $x_2>x_1$, тогда $f(-8)=-0,125$, $f(-4)=-0,25$, т.е $f(x_2)<f(x_1)$, а значит функция $f(x)=1/x$ является убывающей на интервале $(-\infty; 0)$.
$(0; +\infty)$: $x_1=4$, $x_2=8$, т.е. $x_2>x_1$, тогда $f(4)=0, 25$, $f(8)=0,125$, т.е. т.е $f(x_2)<f(x_1)$, а значит функция $f(x)=1/x$ является убывающей на интервале $(0; +\infty)$.
Однако эта функция не является убывающей на объединении этих промежутков. Например, $1>-1$, но $f(1)<f(-1)$.

При исследовании функций на возрастание и убывание принято указывать промежутки возрастания и убывания максимальной длины, включая концы (если, конечно, они входят в эти промежутки). Так, можно было сказать, что функция $f(x)=1/x$ является убывающей на отрезке [2; 500]. Это верно, но такой ответ неполон.

При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки удобно пользоваться понятием окрестности.
Окрестностью точки a называется любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервал (2; 6) – одна из окрестностей точки 3, интервал (-3,3; -2,7) – окрестность точки -3.

Экстремумы
Точка x_0 называется *точкой минимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x)\geq f(x_0)$.
Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x)\leq f(x_0)$.

По определениям значение функции f в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности x_0, как правило, имеет вид гладкого «холма» или заостренного «пика». В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой или заостренной.
Для точек максимума и минимума функции принято общее название – их называют *точками экстремума*.
Значение функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции (общее название – экстремум функции). Точки максимума обозначают $x_{\max}$, а точки минимума $x_{\min}$. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно $y_{\max}$, $y_{\min}$.

Пример 2.
Начертите эскиз графика функции f, если известно, что f возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$. Какой будет точка $x=2$?
Решение:
схематично график можно изобразить в виде:

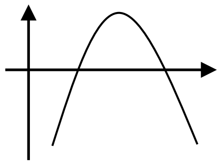


Рисунок 10. Эскиз графика

График имеет вид гладкого «холма», а значит точка x=2 – точка максимума.

Задания для самостоятельного решения:

Начертите эскиз графика функции *f*, определите вид точек, если:

1 вариант *f* возрастает на промежутке (-∞; 2] и убывает на промежутке [2; +∞).	**2 вариант** *f* возрастает на промежутках (-∞; -2] и [0; 3], убывает на промежутке [2; 0].	**3 вариант** *f* возрастает на промежутке [1; 4] и убывает на промежутках (-∞; 1] и [4; +∞).
4 вариант *f* возрастает на промежутках (-∞; -5] и [1; 5], убывает на промежутках [-5; 1] [5; +∞).	**5 вариант** *f* возрастает на промежутке (-∞; 5] и убывает на промежутке [5; +∞).	**6 вариант** *f* возрастает на промежутке (-∞; 0] и убывает на промежутке [0; +∞).
7 вариант *f* возрастает на промежутке [-1; 2] и убывает на промежутках (-∞; -1] и [2; +∞).	**8 вариант** *f* возрастает на промежутках (-∞; -4] и [2; 4], убывает на промежутках [-4; 2] [4; +∞).	**9 вариант** *f* возрастает на промежутках (-∞; -3] и [2; 5], убывает на промежутках [-3; 2] [5; +∞).

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке?
2. Дайте определение точке максимума (минимума) функции.

Практическое занятие № 19 .Степенная функция, ее график и свойства

Цель практической работы:

знать:

– свойства степенной функции с различными показателями степени;

уметь:

– строить график степенной функции с различными показателями степени.

Задачи практической работы:

1. Проверить знания теоретического материала.
2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Сведения из теории:

Степенная функция с натуральным показателем

Функция $y=x^n$, где n – натуральное число, называется степенной функцией с натуральным показателем. При $n=1$ получаем функцию $y=x$.

Прямая пропорциональность

Прямой пропорциональностью называется функция, заданная формулой $y=kx^n$, где число k называется коэффициентом пропорциональности.

Перечислим свойства функции $y=kx$:

1. Область определения функции – множество всех действительных чисел.
2. $y=kx$ – нечетная функция, т.к. $f(-x)=k(-x)=-kx=-k(x)=-f(x)$.
3. При $k>0$ функция возрастает, а при $k<0$ убывает на всей числовой прямой.

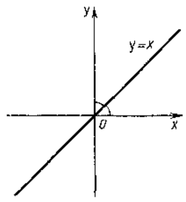


Рисунок 12. График функции $y=kx$

При $n=2$ получаем функцию $y=x^2$. Перечислим свойства функции $y=x^2$:

1. Область определения функции – вся числовая прямая.
2. $y=x^2$ – четная функция, т.к. $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.
3. На промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает.
4. Графиком функции $y=x^2$ является парабола.

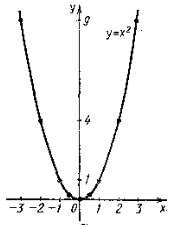


Рисунок 13. График функции $y=x^2$

При $n = 3$ получаем функцию $y=x^3$, ее свойства:

1. Область определения функции – вся числовая прямая.
2. $y=x^3$ – нечетная функция, т.к. $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.
3. Функция $y=x^3$ возрастает на всей числовой прямой.
4. График функции $y=x^3$ называется кубической параболой.

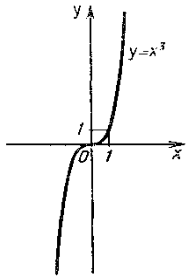


Рисунок 14. График функции $y=x^3$

Пусть n – произвольное четное натуральное число, большее двух: $n=4, 6, 8, \ldots$.

В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^2$. График такой функции напоминает параболу $y=x^2$, только ветви графика при $|n|>1$ круче идут вверх, чем больше n, а при $|n|<1$ «теснее прижимаются» к оси x, чем больше n.

Пусть n – произвольное нечетное число, большее трех: $n=5, 7, 9, \ldots$.

В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^3$. График такой функции напоминает кубическую параболу (только ветви графика тем круче идут вверх, вниз, чем больше n). Отметим также, что на промежутке (0; 1) график степенной функции $y=x^n$ тем медленнее отдаляется от оси Оx с ростом x, чем больше n.

Степенная функция с целым отрицательным показателем.

Рассмотрим функцию $y=x^{-n}$, где n – натуральное число. При $n=2$ получаем $y=x^{-2}$ или $y=\frac{1}{x^2}$.

Свойства этой функции:
1. Функция определена при всех $x \neq 0$.
2. $y=\frac{1}{x^2}$ – четная функция.
3. $y=\frac{1}{x^2}$ – убывает на (0; +∞) и возрастает на (-∞; 0).

Теми же свойствами обладают любые функции вида $y=x^{-n}$ при четном n, большем двух.

Функции вида $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[n]{x}$ обладают теми же свойствами, как и функция $y=x^n$.

Степенная функция с положительным дробным показателем
Рассмотрим функцию $y=x^r$, где r – положительная несократимая дробь. Перечислим некоторые свойства этой функции:
1. Область определения – луч [0; +∞).
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Функция $y = x^r$ возрастает на [0; +∞).

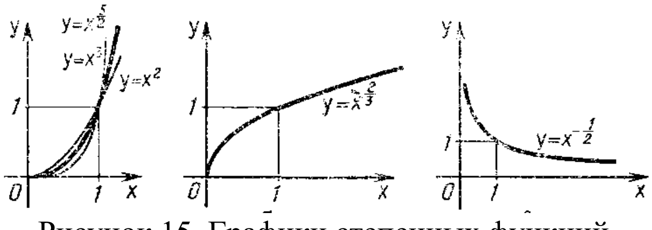


Рисунок 15. Графики степенных функций

На рисунке слева изображен график функции $y=x^{\frac{5}{2}}$. Он заключен между графиками функций $y=x^2$ и $y=x^3$, заданных на промежутке [0; +∞).
Подобный вид имеет график любой функции вида $y=x^r$, где $r>1$.

На том же рисунке посередине изображен график функции $y=x^{\frac{2}{3}}$. Подобный вид имеет график любой степенной функции $y=x^r$, где $0<r<1$.

Степенная функция с отрицательным дробным показателем
Рассмотрим функцию $y=x^{-r}$, где r – положительная несократимая дробь. Перечислим свойства этой функции:
1. Область определения – промежуток (0; +∞).
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Функция $y=x^{-r}$ убывает на (0; +∞).

Пример1.

Построить график функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

Решение:

построим таблицу значений данной функции:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой:

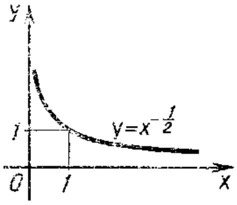


Рисунок 16. График функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$

Подобный вид имеет график любой функции $y=x^{-r}$, где r – отрицательная дробь.

Задания для самостоятельного решения:

Постройте график функции и опишите ее свойства:

1 вариант $y = 2\sqrt{x+1}$.	**2 вариант** $y = 2 - \sqrt[4]{x}$.	**3 вариант** $y = 1 + \left\|\sqrt[3]{x}\right\|$.
4 вариант $y = 3x^{-2}$.	**5 вариант** $y = \sqrt{x} - 4$.	**6 вариант** $y = 1 - \sqrt[3]{x}$.
7 вариант $y = \sqrt{x} + 3$.	**8 вариант** $y = \sqrt[5]{x^4} + 1$.	**9 вариант** $y = \sqrt{x-2} + 1$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется степенной функцией?
2. Перечислите виды степенных функций.
3. Перечислите свойства функции для различных показателей степени.

Практическое занятие № 20

Тригонометрические функции, их свойства и графики

Цель практической работы:

– Применение знаний к решению задач.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Сжатие графика функции к оси ординат

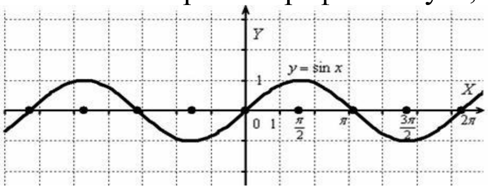
Это случай когда АРГУМЕНТ функции умножен на число, большее единицы.

Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $k>1$, нужно график функции $f(x)$ **сжать к оси** OY в k раз.

Пример 1

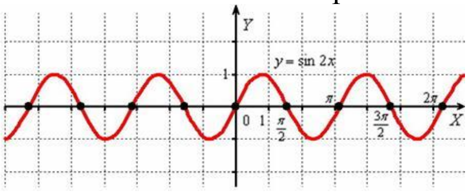
Построить график функции $y=\sin 2x$.

Сначала изобразим график синуса, его период равен $T=2\pi$:



К слову, чертить графики тригонометрических функций вручную – занятие кропотливое, поскольку $\pi\approx 3{,}14,\quad \frac{\pi}{2}\approx 1{,}57,\quad 2\pi\approx 6{,}28$ и т.д., то есть на стандартной клетчатой бумаге аккуратным нужно быть вплоть до миллиметра, даже до полумиллиметра. Впрочем, многие с этим уже столкнулись.

Теперь поиграем на бесконечно длинном баяне. Мысленно возьмём синусоиду в руки и сожмём её **к оси** OY в 2 раза:



То есть, график функции $y=\sin 2x$ получается путём сжатия графика $y=\sin x$ к оси ординат в два раза. Логично, что период итоговой функции тоже уполовинился: $T=\pi$

В целях самоконтроля можно взять 2-3 значения «икс» и устно либо на черновике выполнить подстановку:

$$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

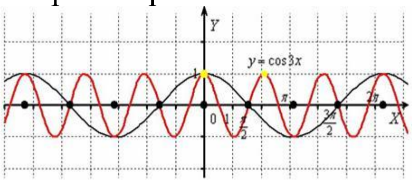
$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi=0$$

Смотрим на чертёж, и видим, что это действительно так.

Пример 2

Построить график функции $y=\cos 3x$

«Чёрная гармошка» $y=\cos x$ сжимается **к оси** OY в 3 раза:



Итоговый график $y=\cos 3x$ проведён красным цветом.

Исходный период $T=2\pi$ косинуса закономерно уменьшается в три раза: $T=\frac{2\pi}{3}$ (отграничен жёлтыми точками).

Растяжение графика функции от оси ординат

Это противоположное действие, теперь баян не сжимается, а растягивается.

Случай имеет место, когда АРГУМЕНТ функции умножается на число $0<k<1$.

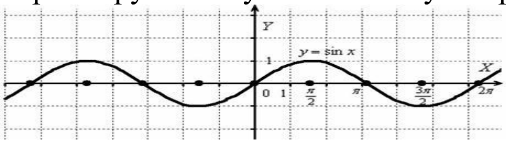
Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $0 < k < 1$, нужно график функции $f(x)$ **растянуть от оси** OY в $\frac{1}{k}$ раз.

Продолжим мучить синус:

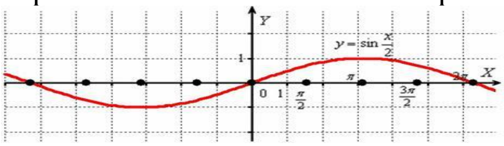
<u>Пример 3</u>

Построить график функции $y = \sin\frac{x}{2}$

Берём в руки нашу «бесконечную гармошку»:



И растягиваем её **от оси** OY в 2 раза:



То есть, график функции $y = \sin\frac{x}{2}$ получается путём **растяжения** графика $y = \sin x$ **от оси ординат** в два раза. Период итоговой функции увеличивается в 2 раза: $T = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$, он толком даже не вместился на данный чертёж.

Операции сжатия/растяжения графиков, разумеется, выполнимы не только для тригонометрических функций.

Задание 1.

1. Построить графики функций.

а) $y = \cos 2x$

в) $y = \cos x - 1$

б) $y = tg\frac{x}{2}$

г) $y = |\sin x|$

д) $y = \cos\frac{x}{2}$

ж) $y = 2 + \sin x$

е) $y = tg 2x$

з) $y = |\cos x|$

Задание 2.

1. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Задание 3.

1. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ____

$\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ____

Задание 4.

1. Построить графики функций.

а) $y = \sin\frac{x}{2}$ в) $y = \sin x + 1$

б) $y = tg 4x$ г) $y = 2\cos x$

2. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку [0; 3π] : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку [0; 3π] :

$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ____

Практическое занятие №21 .
Показательная функция, ее свойства и график

Цель:

Учить строить графики показательной функции

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

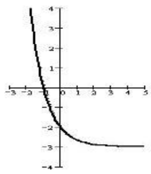
Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание № 1. (Для нахождения области определения функции).
Какие значения аргумента является допустимыми для функций:

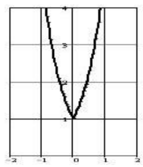
$y = a^{-x}$	**R**
$y = a^{\sqrt{x}}$	$[0; \infty)$
$y = a^{\frac{6}{x}}$	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
$y = a^{\frac{8}{\sqrt{5x-4}}}$	$\left(\frac{4}{5}; \infty\right)$

Задание № 2. (Для нахождения области значений функции).
На рисунке изображен график функции. Укажите область определения и область значений функции:

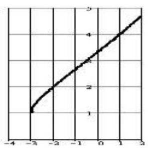
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$



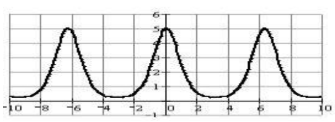
$y = 0{,}2^{-|x|}$



$y = 2^{\sqrt{x+3}}$



$y = 5^{\cos x}$



Задание № 3. (Для указания промежутков сравнения с единицей).
Каждую из следующих степеней сравните с единицей:

$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$	<1	$0<\frac{3}{4}<1$ и $\frac{2}{3}>0$
$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$	>1	$\frac{4}{3}>1$ и $\frac{1}{6}>0$
$\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{7}}$	>1	$0<\frac{3}{5}<1$ и $-\frac{2}{7}<0$
$\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{2}{9}}$	<1	$\frac{5}{2}<1$ и $-\frac{2}{9}<0$

Задание № 4. (Для исследования функции на монотонность).
Сравнить по величине действительные числа *m* и *n* если:

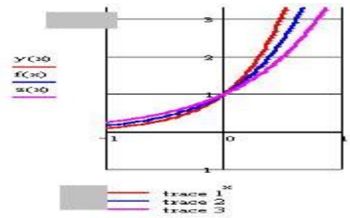
$(2{,}3)^m > (2{,}3)^n$	$m>n$	$2{,}3>1$
$(0{,}7)^m > (0{,}7)^n$	$m<n$	$0<0{,}7<1$
$\left(\frac{2}{3}\right)^m < \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$m>n$	$0<\frac{2}{3}<1$
$\left(1\frac{1}{6}\right)^m < \left(1\frac{1}{6}\right)^n$	$m<n$	$1\frac{1}{6}>1$

Задание № 5. (Для исследования функции на монотонность).
Сделайте заключение относительно основания *a*, если:

$a^{-1,5} > a^{2,5}$	$0<a<1$	$-1{,}5<2{,}5$
$a^{2,3} > a^{1,2}$	$a>1$	$2{,}3>1{,}2$
$a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{3}{4}}$	$0<a<1$	$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$
$a^{\frac{1}{2}} < a^{\frac{2}{3}}$	$a>1$	$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$

В одной координатной плоскости построены графики функций:
y(x) = 10ˣ; f(x) = 6ˣ; z(x) - 4ˣ

Как располагаются графики показательных функций относительно друг друга при x > 0, x = 0, x < 0?

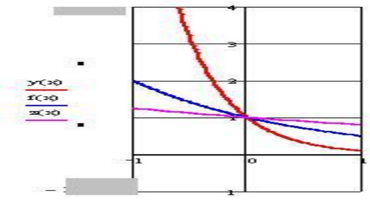


Вывод:

при x < 0	чем *больше* значение основания степени, тем *ближе* к оси O_x располагается график показательной функции;
при x = 0	графики показательных функций *пересекаются* в одной точке (0;1);
при x > 0	чем *больше* значение основания степени, тем *дальше* от оси O_x располагается график показательной функции.

В одной координатной плоскости построены графики функций:
y(x) = (0,1)ˣ; f(x) = (0,5)ˣ; z(x) = (0,8)ˣ.

Как располагаются графики показательных функций относительно друг друга при x > 0, x = 0, x < 0?



Вывод:

при x <	чем *меньше* значение основания степени, тем *дальше* от оси O_x располагается график

0	показательной функции;
при x = 0	графики показательных функций *пересекаются* в одной точке (0;1);
при x > 0	чем *меньше* значение основания степени, тем *ближе* к оси O_x располагается график показательной функции.

Графики, построение которых основано на применении графиков основных элементарных функций, их параллельных переносах, растяжении, симметрии относительно осей координат, а также использовании периодичности и графического сложения графиков.

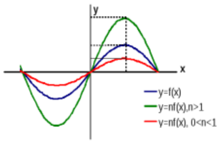
1. График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$, путем симметрии этого графика относительно оси OX.

2. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$, путем симметрии этого графика относительно оси OY.

3. График функции $y = f(x-a)$ получается из графика функции $y = f(x)$, путем параллельного переноса этого графика вдоль оси OX на вектор $a\{a;0\}$. Если$a>0$, то график смещается на a единиц вправо, а если $a<0$ – влево.

4. График функции $y = f(x)+b$ получается из графика функции $y = f(x)$, путем параллельного переноса этого графика вдоль оси OY на вектор $b\{0;b\}$. Если$b>0$, то график смещается на b единиц вверх, а если $b<0$ – вниз.

5. График функции $y = f(kx)$, $k>0$, $k\neq0$, получается из графика функции $y = f(x)$, путем сжатия в k раз ($k > 1$) или растяжения в $\frac{1}{k}$ раз ($0 <k < 1$) этого графика вдоль оси OX.



6. График функции $y = n\cdot f(x)$, $n> 0$, $n \neq 1$ получается из графика функции $y = f(x)$, путем растяжения в n раз ($n > 1$) или сжатия в $\frac{1}{n}$ раз ($0 <n < 1$) этого графика вдоль оси OY.

7. График функции $y = f(|x|)$ для $x \geq 0$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$, а для $x<0$ получается путем симметрии графика $y = f(x)$ относительно оси OY.

8. График функции $y = |f(x)|$ для $f(x)\geq 0$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$, а для $f(x)<0$ получается путем симметрии графика $y = f(x)$ относительно оси OX.

Задание 6. Найти область определения функции $y = \frac{1}{2x-1}$

Решение. Выражение не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль, т.е. $2x – 1 + 0$, $x \neq ½$.

Ответ. $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$.

Задание 7. Найти область определения функции $y = \sqrt{5x - x^2 - 4} + \arccos\frac{x}{3} - 1$

Решение. Должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 5x - x^2 - 4 \geq 0 \\ -1 \leq \frac{x}{3} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-4) \leq 0 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

Ответ. $x\in[1;3]$

Задание 8. Построить график функции $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Решение. $y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. Вид графика $y = \frac{1}{x}$. Растягиваем этот график в два раза вдоль оси OY и получаем график $y = \frac{2}{x}$ (синяя пунктирная линия). Потом смещаем этот график на единицу вправо - $y = \frac{2}{x-1}$ (зеленая пунктирная линия), а затем на единицу вверх и получаем график функции $y = 1 + \frac{2}{x-1}$ (черная сплошная линия на рис.1).

Задание 9. Построить график функции $y = 3\sin(2x - 1) + 1$.
Решение. Вид графика $y_1 = \sin x$ (см. пункт 1.1 Тригонометрические функции). Выполним следующие преобразования.
1) $y_2 = \sin 2x$ – сжатие y_1 в два раза вдоль оси OX (рис. 2, синий цвет);
2) $y_3 = \sin 2(x - ½)$ – сдвиг y_2 на ½ вправо вдоль оси OX (рис. 2, зеленый цвет);
3) $y_4 = 3\sin 2(x - ½)$ – растяжение y_3 в три раза вдоль оси OY (рис. 2, голубой цвет);
4) $y_5 = 3\sin 2(x - ½) + 1$ – параллельный перенос y_4 на 1 вверх по оси OY (рис. 2, красный цвет).

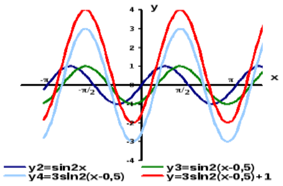


Рис. 2

Задание 10. . Построить график функции и описать его основные свойства:
$y = (x^2 - 5x)\cdot\frac{|x-5|}{x-5}$.

Решение.
$$y = x\cdot(x-5)\cdot\frac{|x-5|}{x-5} \Rightarrow \begin{cases} y = x\cdot|x-5| \\ x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y = x\cdot(x-5), x > 5 & (1) \\ y = x\cdot(5-x), x < 5 & (2) \end{array}\right.$$
График изображен на рис. 3, точка (5;0) выколота, так как

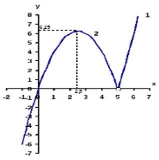


Рис. 3

Задание 11.
Упражнения. Найти область определения функции.
1. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$; 2. $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$;
3. $y = \sqrt[4]{x-4} + \frac{1}{\sqrt[5]{x-5}}$; 4. $y = \sqrt[4]{x-3} + \frac{1}{\sqrt{8-x}}$;
5. $y = \sqrt{7-x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x+3}}$; 6. $y = \sqrt[3]{x+5} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$.
7. $y = \lg(x^2 - 5x + 6)$; 8. $y = \lg(x^2 - 6x + 8)$;
9. $y = \sqrt{\sin x}$; 10. $y = \sqrt{\cos x}$;
11. $y = \sqrt{\lg(x-2)^2}$; 12. $y = \sqrt{\lg(1-x)^2}$.

Практическое занятие № 22.

Логарифмическая функция, ее свойства и график

Цель практической работы:
Закрепить знания логарифмической функции

Задачи практической работы:
1.Проверить знания теоретического материала.
2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

1. Найдите область определения функции

$y = lg\left(-2 + x + x^2\right).$
$y = lg\left(4x - x^2\right)$
$y = lg\left(3 - 2x - x^2\right)$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = log_6 x$ на отрезке $\left[\frac{1}{216}; 36\right]$.
$y = log_{\frac{2}{3}} x$ на отрезке $\left[\frac{8}{27}; \frac{81}{16}\right]$
$y = log_5 x$ на отрезке $\left[\frac{1}{125}; 25\right]$

3. Расставьте числа в порядке возрастания $log_{\frac{3}{5}} 2\sqrt{2}; log_{0,6} \sqrt{21}$ и $log_{0,6} 4{,}5$.

4. Решите неравенство $log_4 (2 + x) < \frac{1}{2} x$.

5. Постройте график функции $y = log_{\frac{1}{2}} \left(1 + |x|\right)$.

Самостоятельная работа

1.
– Не выполняя построения графика функции $y = log_4 x$ найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[\frac{1}{4}; 2]$.
– Не выполняя построения графика функции $y = log_{1/2} x$ найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[\frac{1}{2}; 4]$.
– Не выполняя построения графика функции $y = log_{0,4} x$ найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[\frac{4}{25}; 2{,}5]$.

2. Решите графически неравенство
$log_{1/3} x \geq 2$ $log_3 x < 1$ $log_5 x \geq -1$ $log_{1/2} x > -\frac{1}{2}$.

3. Вычислите

1) а) $log_5 75 - log_5 3$;
2) б) $log_3 49 : log_3 7$;
3) в) $log_{1/2}(7^{log_7 4})$
4) а) $log_3 6 + log_3 4{,}5$;
5) б) $log_5 27 : (log_5 6 - log_5 2)$;
6) в) $log_{\sqrt{2}}(10^{lg 4})$

Практическое занятие № 23 -24 . Предел последовательности

Цель практической работы:

– Закреплять умение вычислять числовую последовательность

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Вычислить предел числовой последовательности

1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left(n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}\right)}{\frac{1}{n^2}(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}==\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{5}{n}}+\sqrt[4]{9+\frac{1}{n^8}}}{\left(1+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\sqrt{\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n}+1}}=\frac{\sqrt[3]{0}+\sqrt[4]{9+0}}{\left(1+\sqrt{0}\right)\sqrt{0-0+1}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}\right)}{\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}\right)}==\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{3+\frac{3}{n^3}}+\sqrt[4]{n+\frac{1}{n^4}}}=\left\{\frac{\sqrt{0-0}-\sqrt{1+0}}{\sqrt[3]{3+0}+\sqrt[4]{\infty}}=\frac{-1}{\infty}\right\}=-\infty$$

3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}\right)}{\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}\right)}==\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}-\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}=\left\{\frac{\sqrt{\infty+0}-\sqrt{1-0}}{\sqrt[3]{1+0}-\sqrt{0-0}}=\frac{\infty}{1}\right\}=\infty$$

4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}\left(\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3\right)}{\frac{1}{n^3}\left(\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n\right)}==\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^7}-\frac{1}{n^9}}+7}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^{11}}+\frac{1}{n^{12}}}-\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt[3]{0-0}+7}{\sqrt[4]{1+0+0}-0}=\frac{7}{1}=7$$

5)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}-n}$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}\right)}{\frac{1}{n}\left(\sqrt[5]{n}-n\right)}==\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{125+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[5]{\frac{1}{n^4}}-1}=\frac{\sqrt{0-0}-\sqrt[3]{125+0}}{\sqrt[5]{0}-1}=\frac{-5}{-1}=5$$

6)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt{9+n^2}}$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt{9+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left(n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt{9+n^2}}==\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{\frac{1}{n^4}}-\sqrt[3]{27+\frac{1}{n^4}}}{\left(\frac{1}{n}\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sqrt{9+n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{\frac{1}{n^4}}-\sqrt[3]{27+\frac{1}{n^4}}}{\left(1+\sqrt[4]{\frac{1}{n^3}}\right)\sqrt{\frac{9}{n^2}+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt[5]{0}-\sqrt[3]{27+0}}{\left(1+\sqrt[4]{0}\right)\sqrt{0+1}}=\frac{-3}{1}=-3$$

Практическое занятие №25. Решение задач на непрерывность функции

Цель практической работы:

Закрепить знания о непрерывности функции

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задача 1.

При каком значении числа *A* функция

$$f(x)=\begin{cases}x+a, & x\geq 5,\\ x^2-3x, & x<5\end{cases}$$

Будет непрерывной?

Указание

Функция может иметь разрыв только в точке $X = 5$, поэтому *A* следует выбрать так, чтобы в этой точке выполнялось равенство

$$x+a=x^2-3x.$$

Решение

Областью определения функции является все множество действительных чисел, причем по обе стороны точки $X = 5$ функция является элементарной, то есть непрерывной. Для обеспечения непрерывности в точке $X = 5$ поставим условие

$$5 + a = 25 - 15 \Rightarrow a = 5.$$

Ответ: 5.

Задача 2.

Каким числом можно доопределить функцию

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$$

При $X = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Указание

Подобная операция возможна в том случае, если точка разрыва является устранимой особенностью, то есть существует конечный предел функции в этой точке.

Решение

Найдем предел данной функции в точке $X = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3.$$

Следовательно, если принять F (0) = 3, функция станет непрерывной точке $X = 0$.

Ответ: 3.

Задача 3.

Каким числом можно доопределить функцию

$$f(x) = x \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

При $X = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Указание

Вычисляя предел функции в точке $X = 0$, воспользуйтесь тем, что второй множитель – ограниченная функция, и примените свойства бесконечно малых.

Решение

$$\text{При} \quad x \to 0 \quad \lim_{x \to 0} x = 0 \Rightarrow x - б.м.,$$

$$\left| \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \right| \le 1 \Rightarrow \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \quad -$$

Ограниченная функция. Как известно, произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая, поэтому

$$\lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \right) = 0,$$

То есть предел существует и конечен. Поэтому можно доопределить функцию так: F (0) = 0.

Ответ: F (0) = 0.

Задача 4.

Каким числом можно доопределить функцию

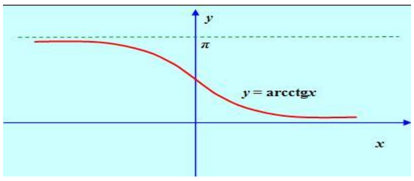
$$f(x) = arcctg \frac{3}{x}$$

При $X = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Указание

Подобная операция возможна в том случае, если точка разрыва является устранимой особенностью, то есть существует конечный предел функции в этой точке.

Решение



Найдем односторонние пределы данной функции в точке $X = 0$:

$$\lim_{x\to -0} arcctg\frac{3}{x} = \lim_{t\to -\infty} arcctg t = \pi \quad \left(t = \frac{3}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to +0} arcctg\frac{3}{x} = \lim_{t\to +\infty} arcctg t = 0 \neq \lim_{x\to -0} arcctg\frac{3}{x}.$$

Следовательно, предел данной функции в точке $X = 0$ в обычном смысле не существует, поэтому добиться ее непрерывности в этой точке невозможно.

Ответ: это невозможно.

Задача 5.

Найти количество точек разрыва функции

$$y = \frac{2x-3}{\log_2|x|}.$$

Исследовать характер этих точек.

Указание

На область определения накладываются два ограничения: логарифмируемое выражение должно быть положительным, а знаменатель дроби – не равным нулю.

Решение

Данная функция не существует при трех значениях аргумента: $X = 0$ и $X = \underline{+}1$ (в первом случае знаменатель не существует, во втором он равен нулю). Каждая из найденных точек является внутренней точкой области определения и, следовательно, точкой разрыва.

Исследуем характер точек разрыва:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3}{\log_2|x|} = \lim_{x\to 0}(2x-3)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\log_2|x|} = -3\cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $X = 0$ – устранимая особенность.

2) *При* $x \to \pm 1 \quad |x| \to 1 \Rightarrow \log_2|x| \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\log_2|x|} \Rightarrow \infty.$

Следовательно,

$$\lim_{x\to \pm 1}\frac{2x-3}{\log_2|x|} = \infty,$$

И $X = \underline{+}1$ – точки разрыва 2-го рода.

Ответ: $X = 0$ – устранимая особенность, $X = \underline{+}1$ – точки разрыва 2-го рода.

Задача 6.

Выяснить, какие из функций

1) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

2) $f(x) = \frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}$

3) $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$

4) $f(x) = \frac{|2x+1|}{2x+1}$

Имеют точки разрыва 1-го рода.

Указание

В точке разрыва 1-го рода существуют конечные односторонние пределы функции, но они не равны между собой.

Решение

Найдем точки разрыва каждой функции и исследуем их характер.

1) Функция

$$f(x)=\frac{\cos x}{x}$$

Не определена при $X = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,$$

Следовательно, единственная точка разрыва этой функции – это точка разрыва 2-го рода.

2) Функция

$$f(x)=\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}$$

Не определена при $X = 0$ (заметим, что знаменатель основной дроби не равен нулю ни при каком значении X).

Найдем односторонние пределы $F(X)$ в точке $X = 0$:

$$\lim_{x\to -0}\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{1-3^{-\infty}}=\frac{5}{1-0}=5;$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{1-3^{+\infty}}=\frac{5}{-\infty}=0\neq 5.$$

Следовательно, $X = 0$ – точка разрыва 1-го рода.

3) Функция

$$f(x)=\frac{1}{(x-5)^2}$$

Не определена при $X = 5$.

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{(x-5)^2}=\infty,$$

Следовательно, точка $X = 5$ – точка разрыва 2-го рода.

4) Функция

$$f(x)=\frac{|2x+1|}{2x+1}$$

Не определена при $X = -0{,}5$. При этом

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{2x+1}=1, & x>-0{,}5;\\ -\dfrac{2x+1}{2x+1}=-1, & x<-0{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, односторонние пределы в точке $X = -0{,}5$ равны соответственно 1 и -1, то есть эта точка – точка разрыва 1-го рода.

Ответ: 2,4.

Практическое занятие №26-27
Вычисление производных простых функций

Цель практической работы: учить находить производные простых функций

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

<u>Пример 1</u>

Вычислить производную функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ в точке $x = 5$

$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 72x + 90)' = 3x^2 + 6x - 72$

На втором шаге вычислим значение производной в точке $x = 5$:

$f'(5) = 3 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 - 72 = 75 + 30 - 72 = 33$

Пример 2

Вычислить производную функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ в точке $x = -4$

Пример 3

Вычислить производную функции $f(x) = \dfrac{x^2 arctg5x}{2} - \dfrac{x}{10} + \dfrac{1}{50} arctg5x$ в точке $x = \dfrac{1}{5}$.

Сначала найдем производную:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 arctg5x}{2} - \frac{x}{10} + \frac{1}{50} arctg5x\right)' = \frac{1}{2}(x^2 arctg5x)' - \frac{1}{10}(x)' + \frac{1}{50}(arctg5x)' =$$

$$= \frac{1}{2}((x^2)' arctg5x + x^2 (arctg5x)') - \frac{1}{10} + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{1+(5x)^2} \cdot (5x)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x arctg5x + x^2 \cdot \frac{5}{1+(5x)^2}\right) - \frac{1}{10} + \frac{5}{50(1+25x^2)} =$$

$$= x arctg5x + \frac{5x^2}{2(1+25x^2)} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10(1+25x^2)} = (*)$$

Производная, в принципе, найдена, и можно подставлять требуемое значение $x = \dfrac{1}{5}$. Но что-то делать это не сильно хочется. Выражение очень длинное, да и значение «икс» у нас дробное. Поэтому стараемся максимально упростить нашу производную. В данном случае попробуем привести к общему знаменателю три последних слагаемых:

$$(*) = x arctg5x + \frac{5x^2 \cdot 5 - (1+25x^2) + 1}{10(1+25x^2)} = x arctg5x + \frac{25x^2 - 1 - 25x^2 + 1}{10(1+25x^2)} =$$

$$= x arctg5x + \frac{0}{10(1+25x^2)} = x arctg5x + 0 = x arctg5x$$

Ну вот, совсем другое дело. Вычислим значение производной в точке $x = \dfrac{1}{5}$:

$$f'\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} arctg\left(5 \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} arctg1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{20}$$

Пример 4

Вычислить производную функции $f(x) = x arctg2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)$ в точке $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 5:

Вычислить производную функции $y = 5x^2 + 3x + 4$

Решение:

$y' = (5x^2 + 3x + 4)' = = 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 3 \cdot 1 \cdot x^{1-0} + 0 = 10 \cdot x + 3$

Пример 6:

Вычислить производную функции $y = 3x^{\frac{13}{7}} - 4x\sqrt{x} + \frac{7}{x^3}$

Решение:

$$y' = \left(3x^{\frac{13}{7}} - 4x\sqrt{x} + \frac{7}{x^3}\right)' = \left(3x^{\frac{13}{7}} - 4x^{1,5} + 7x^{-3}\right)' = = \left(3x^{\frac{13}{7}}\right)' - \left(4x^{1,5}\right)' + \left(7x^{-3}\right)' =$$

$$= 3\cdot\frac{13}{7}x^{\frac{13}{7}-1} - 4\cdot 1,5x^{1,5-1} + 7\cdot x^{-3-1} = 3\cdot\frac{13}{7}x^{\frac{6}{7}} - 4\cdot 1,5x^{0,5} + 7\cdot x^{-4} =$$

$$= \frac{39}{7}x^{\frac{6}{7}} - 6\sqrt{x} + \frac{7}{x^4}$$

Пример 7:

Вычислить производную функции $y = x^2\sin(x)$

Решение:

$$y' = \left(x^2\sin(x)\right)' = = x^2\left(\sin(x)\right)' + \left(x^2\right)'\sin(x) = = x^2\cos(x) + 2x\sin(x)$$

Пример 8:

Вычислить производную функции $y = \frac{e^{x+14}}{x^2+2x}$

Решение:

$$y' = \left(\frac{e^{x+14}}{x^2+2x}\right)' = = \frac{\left(e^{x+14}\right)'\left(x^2+2x\right) - \left(e^{x+14}\right)\left(x^2+2x\right)'}{\left(x^2+2x\right)^2} =$$

[Все бы хорошо и по табличным производным. Кроме e^{x+14}. Вспомним свойства степеней $e^{x+14} = e^x e^{14}$ и вынесем константу за знак дифференциала.]

$$= \frac{\left(e^x e^{14}\right)'\left(x^2+2x\right) - e^{x+14}(2x+2)}{\left(x^2+2x\right)^2} = \frac{e^{14}\left(e^x\right)'\left(x^2+2x\right) - e^{x+14}(2x+2)}{\left(x^2+2x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{14}e^x\left(x^2+2x\right) - e^{x+14}(2x+2)}{\left(x^2+2x\right)^2} = \frac{e^{x+14}\left(x^2+2x\right) - e^{x+14}(2x+2)}{\left(x^2+2x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{x+14}\left(x^2+2x-2x-2\right)}{\left(x^2+2x\right)^2} = \frac{e^{x+14}\left(x^2-2\right)}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

Проверочная работа «Вычисление производных»

Цель практической работы:

Проверить умения и навыки при вычислении производных

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1. Найдите производные следующих функций.

а) $y=\left(x^2+x+5\sqrt{x}\right)$;

б) $y=(\sin x+5)\cdot e^x$;

в) $y=\dfrac{x^2}{2-x^2}$;

г) $y=-8x+\sqrt{x}-3x^2$;

д) $y=(x-9)\cdot\left(\sqrt{x}+3^x\right)$;

е) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;

ж) $y=\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}+8$;

з) $y=(2x+1)(x^2+3x-1)$;

и) $y=\dfrac{x^2+1+x}{1+x^2}$;

к) $y=2\sqrt{x}+5\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}-1$;

л) $y=\left(2^x+\ln x\right)\cdot arctgx$;

м) $y=\dfrac{3x-1}{5x+4}$;

н) $y=x^3+\dfrac{5}{x^2}+7\sin x$;

0) $y=\arcsin x\cdot\left(x^3+7x-4\sqrt{x}\right)$;

п) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3x-x^3}$;

р) $y=4x^{\frac{3}{4}}+3x^{\frac{2}{3}}+3x$;

с) $y=\dfrac{x^8+e^x}{7x+\cos x-4}$.

Задание 2. Найдите производные следующих функций при x=1:

1. $\left(x^5+1\right)'=$
2. $\left(\frac{1}{x}+2x\right)'=$
3. $\left(5x^5-\sqrt{x}\right)'=$
4. $\left(\frac{1}{2}x^2+4\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)'=$
5. $\left((3x+7)\cdot(7x^3+5x-4)\right)'=$
6. $\left(\frac{4x^2+8}{5-2x^3}\right)'=$
7. $\left(x^3-4\right)'=$
8. $\left(-\frac{1}{x}-3x\right)'=$
9. $\left(4x^4+\sqrt{x}\right)'=$
10. $\left(\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{x}+\frac{5}{x}\right)'=$
11. $\left((5x-4)\cdot(2x^4-7x+1)\right)'=$
12. $\left(\frac{x^3-7}{3-4x^4}\right)'=$

Практическое занятие №28
Вычисление производных основных элементарных функций.

Цель практической работы:

Применение знаний при решении задач.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

1 вариант

Задание 1. Найти производную функции.

а) $y = x^3 - 9x^2 + x - 1$ *б)* $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ в) $y = x^2 \cdot \sin x$

г) $y = \sin^2 3x$ *д)* $y = \log_3 4x$ е) $y = \frac{3}{5x^2}$

Задание 2. Решить уравнение f′(x) = 0, если $f(x) = x - \cos x$

Задание 3. Написать уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x_0

$f(x) = x - 3x^2$ $x_0 = 2$

2 вариант

Задание 1. Найти производную функции.

а) $y = 5x^4 - 3x^2 + 5$ *б)* $y = \frac{x^2 + 1}{3x}$ в) $y = \sin(x^2 - 2x + 4)$

г) $y = x \cdot \sin 2x$ *д)* $y = \sqrt{1 + x^3}$ е) $y = (2 + 5x)^4$

Задание 2. Решить уравнение f′(x) = 0, если $f(x) = \ln(x + 1) - 2x$

Задание 3. Написать уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x_0

$f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = 3$.

3 вариант

Задание 1. Найти производную функции.

а) $y = 6x^4 - 9e^x$ *б)* $y = \sqrt{x + 5}$ в) $y = x \cdot e^{x^2}$

г) $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ *д)* $y = \log_5 10x$ е) $y = tg(2x)$

Задание 2. Решить уравнение f′(x) = 0, если $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

Задание 3. Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0

$f(x) = 2\sqrt{x}$ $x_0 = 3$ и написать уравнение касательной в этой точке.

4 вариант

Задание 1. Найти производную функции.

а) $y = \frac{1}{4}x^8 + 3\sin x$ *б)* $y = tg\ x^5$ в) $y = x \cdot 2^x$

г) $y = \sin(2x + 5)$ *д)* $y = \frac{3 - x}{x^2}$ е) $y = (x^4 - x - 1)^4$

Задание 2. Решить уравнение f′(x) = 0, если $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 3$

Задание 3. Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0 $f(x) = \frac{1}{3x^2}$ $x_0 = 1$ и написать уравнение касательной в этой точке.

Самостоятельная работа

Производная функции

1) Найти производную функции $f(x)=2e^x+3x^2$.
2) Вычислите производную функции $f(x)x \bullet \sin x$.
3) Найти производную функции $y = (3x – 1)(2 – x)$.
4) Вычислите производную функции $y=9x^2-\cos x$.
5) Найдите производную функции $y=e^x-x^7$.
6) Вычислить производную функции $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.
7) Найти $f'(1)$, если $f(x)=3x^2-2x+1$.
8) Найдите производную функции $y = x^2(3x^5 – 2)$ в точке $x_0 = – 1$.
9) Вычислите $f'(\pi)$, если $f(x)=(2x-1)\cos x$.
10) Найдите $f'(1)$, если $f(x)=(3-x^2)(x^2+6)$.
11) Вычислите $f'(1)$, если $f(x)=(x^4-3)(x^2+2)$.
12) Найдите значение производной функции $y=\frac{2-x}{x}$ в точке $x_0 = 0,5$.
13) Найдите $f'(4)$, если $f(x)=\frac{1}{6}x^3-8\ln x$.
14) Найдите значение производной функции $f(x)=3\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x$ при $x=\frac{\pi}{4}$.
15) Найдите значение производной функции $f(x)=2\sin x$ при $x=\frac{\pi}{2}$.
16) Найдите значение производной функции $f(x)=1-3\cos x$ при $x=\frac{\pi}{2}$.
17) Определите промежутки возрастания и убывания функции $y=\sqrt{4x^2-x-3}$.
18) Найдите максимум и минимум функции $y=5x^4-10x^2+9$.
19) Найти экстремумы функции $y = – x^3 + 6x^2 + 15x + 1$.
20) Найдите точки экстремума функции $y = – x^3 – 3x^2 + 24x – 4$ на промежутке $\left(-5;\frac{1}{5}\right)$.
21) Найдите наибольшее значение выражения $3x^5 – 5x^3 + 6$ на отрезке $[–2;2]$.
22) Написать уравнение касательной к параболе $y = x^2 – 6x + 5$ в точке пересечения её с осью ординат.
23) Найдите максимум функции $y=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+8\frac{5}{6}$.
24) Найдите экстремальные значения функции $y=x+\frac{4}{x^2}$.
25) Исследуйте на максимум и минимум функцию $y = 3x^4 – 3x^2 + 2$.
26) Найдите тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции $y=-\frac{4}{x}$ в его точке с абсциссой $x_0 = – 2$.
27) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x – 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.
28) Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=7x-5\sin x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Практическое занятие №29. Вычисление первообразных

Цель практической работы:

– Закрепить знания и умения вычислять первообразные

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Пример 1. Найдите какую-либо первообразную функции $y=-\frac{3}{2x^2}$

Решение:

Представим функцию $y=-\frac{3}{2x^2}$ в виде $y=-\frac{3}{2}\cdot x^{-2}$. Первообразная данной функции будет $F(x)=-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{3}{2x}+C$. Т.к. нужно найти какую-либо первообразную, то пусть это будет $F(x)=\frac{3}{2x}+4$. Чтобы проверить правильность найденной первообразной, нужно от $F(x)=\frac{3}{2x}+4$ взять производную: $F'(x)=-\frac{3}{2x^2}=y$.

Ответ: $F(x)=\frac{3}{2x}+4$.

Пример 2. Для функции $f(x)=\frac{3}{\sin^2 x}+7\sin x-2\cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $\left(\frac{\pi}{2};9\right)$.

Решение:

Первообразная данной функции будет F(x)=-3ctgx-7cox-2sinx+C.

Так как график первообразной проходит через точку $\left(\frac{\pi}{2};9\right)$, то координаты этой точки являются корнями уравнения. Получаем: $9=-3ctg\frac{\pi}{2}-7\cos\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{2}+C;\quad 9=-2+C;\quad C=11$.

Ответ: F(x)=-3ctgx-7cox-2sinx+11.

Пример 3. Найдите первообразные функций:

1) $f(x)=\frac{3}{\cos^2 x}$.

2) f(x)=-7sinx.

3) $f(x)=\frac{4}{\sin^2 x}$.

4) f(x)=1,2cosx.

5) f(x)=-7cosx.

6) f(x)=sinx-cosx.

7) $f(x)=2\sin x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

8) $f(x)=2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9) $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

10) Найдите значение первообразной функции $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}$ при $x=\frac{\pi}{4}$, график которой проходит через данную точку $\boldsymbol{M}\left(0;\ 1\dfrac{2}{3}\right)$.

11) Найдите значение первообразной функции $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$ при $x=\frac{\pi}{12}$, график которой проходит через данную точку $\boldsymbol{M}\left(-\dfrac{2\pi}{3};\ 3\right)$.

12) Найдите значение первообразной функции $f(x)=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ при $x=\dfrac{\pi}{12}$, график которой проходит через данную точку $\boldsymbol{M}\left(-\dfrac{3\pi}{4};\ 2\right)$.

Практическое занятие №30. Вычисление неопределенного интеграла

Цель практической работы:

– закрепить теоретический материал;

– учить вычислять неопределенный интеграл

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1. Вычислить неопределенный интеграл $\int x^5dx$

Решение. Для решения данного интеграла не нужно использовать свойства неопределенных интегралов, достаточно формулы интеграла степенной функции:

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

В нашем случае $n=5$, тогда искомый интеграл равен:

$$\int x^5dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+C=\frac{x^6}{6}+C$$

Ответ. $\int x^5dx=\dfrac{x^6}{6}+C$

Задание 2. Вычислить неопределенный интеграл $\int\dfrac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение. Для этого вынесем из знаменателя $\sqrt{2}$ за знак интеграла

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{2}-x^2}}$$

далее, используя таблицу интегралов (Формула №11), получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{2}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}x + C$$

Ответ. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}x + C$

Задание 3. Вычислить неопределенный интеграл $\int \operatorname{ctg} x dx$

Решение. Распишем подынтегральную сумму, используя тригонометрические функции (определение котангенса)

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

Внесем $\cos x$ под знак дифференциала:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

Полученный интеграл можно вычислить, используя табличный интеграл

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

В результате получим

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

Ответ. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

Задание 4. Найти неопределенный интеграл $\int (1+\sin x)^3 \cos x dx$

Решение. Введем замену $1+\sin x = t$ и полученный интеграл находим как интеграл от степенной функции:

$$\int (1+\sin x)^3 \cos x dx \left\| \begin{array}{c} 1+\sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\| = \int t^3 dx =$$

$$= \frac{t^{3+1}}{3+1} + C = \frac{t^4}{4} + C$$

Сделаем обратную замену

$$\int (1+\sin x)^3 \cos x dx = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(1+\sin x)^4}{4} + C$$

Ответ. $\int (1+\sin x)^3 \cos x dx = \frac{(1+\sin x)^4}{4} + C$

Задание 5. Найти неопределенный интеграл $\int x \sin x dx$

Решение. Воспользуемся методом интегрирования по частям. Для этого положим

$$u = x\ ,\ du = dx$$

$$dv = \sin x dx\ ,\ v = \int \sin x dx = -\cos x$$

Подставим это в формулу для интегрирования по частям, затем воспользуемся формулой интеграла косинуса из таблицы интегралов

$$\int x \sin x dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

Ответ. $\int x \sin x dx = -x\cos x + \sin x + C$

Задание 6. Вычислить неопределенный интеграл $\int (5x+12)dx$

Задание 7.

$$\int\left(\frac{1}{x}+x^2\ln 5-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=$$
$$=\int\frac{dx}{x}+\ln 5\int x^2dx-4\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{3}\int x^{-\frac{4}{3}}dx+7\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\ln|x|+\ln 5\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)}\cdot x^{-\frac{1}{3}}+7\arcsin x+C=$$
$$=\ln|x|+\frac{(\ln 5)\cdot x^3}{3}-8\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+7\arcsin x+C,\ где\ C=const$$

Задание 8.

$$\int x(1-2x)^3dx=\int x(1-6x+12x^2-8x^3)dx=\int(x-6x^2+12x^3-8x^4)dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}-6\cdot\frac{x^3}{3}+12\cdot\frac{x^4}{4}-8\cdot\frac{x^5}{5}+C=\frac{x^2}{2}-2x^3+3x^4-\frac{8x^5}{5}+C,\ где\ C=const$$

В данном примере мы использовали формулу сокращенного умножения $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Задание 9.

$$\int\frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx=\int\left(x+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln|x|+C=$$
$$=\frac{x^2}{2}+3\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln|x|+C,\ \text{где}\ C=const$$

Практическое занятие № 31. Вычисление определенного интеграла

Цель практической работы:

- закрепить теоретические знания;
- учить вычислять определенный интеграл

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Если F(x) – одна из первообразных непрерывной функции f(x) на [a,b], то справедлива **формула Ньютона-Лейбница**

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).\ (1)$$

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], а функция x = φ(t) непрерывно дифференцирована на отрезке $[t_1,t_2]$, причем $a=\varphi(t_1)$, $b=\varphi(t_2)$, то имеет место **формула**

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.\ (2)$$

Если функции u(x), v(x) и их производные u'(x), v'(x) непрерывны на отрезке [a,b], то справедлива **формула интегрирования по частям**

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.\ (3)$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 e^{2x}dx.$$

Решение.

На основании таблицы основных интегралов и формулы (1) имеем:

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{2}(x^2 + 2x + 1)dx$$

Решение.

На основании таблицы основных интегралов и формулы (1) имеем:

$$\int_{-1}^{2}(x^2 + 2x + 1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$
$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)\right) = 9$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_0^8\left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$$

Решение.

На основании таблицы основных интегралов и формулы (1) имеем:

$$\int_0^8\left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx = \sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx + \int_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx =$$
$$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_0^8 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{8^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4} = 33\frac{1}{3}$$

Пример 4 Вычислить интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

Решение.

На основании формулы произведения синусов, таблицы основных интегралов и формулы (1) имеем:

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\sin 3x =$$
$$= \frac{1}{2}\cos x \sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x \sin 3x = \frac{1}{4}(\sin 4x + \sin 2x) - \frac{1}{4}\sin 6x =$$
$$= \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 6x.$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin 4x dx + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin 2x dx -$$
$$-\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin 6x dx = -\frac{1}{16}\cos 4x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \frac{1}{8}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} + \frac{1}{24}\cos 6x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} =$$
$$= -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = -\frac{5}{24}.$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\int_7^9 \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}dx.$$

Решение.

Разложим подынтегральную функцию на сумму простых дробей,

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{x^2 - x + 2}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)} =$$
$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{D}{x-1} + \frac{C}{x+1} =$$
$$= \frac{(A+B+C+D)x^3 + (2A - 2B + C - D)x^2}{(x^2-4)(x^2-1)} +$$
$$+ \frac{(-A - B - 4C - 4D)x + (-2A + 2B - 4C + 4D)}{(x^2-4)(x^2-1)}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + B + C + D = 0, \\ x^2 & 2A - 2B + C - D = 1, \\ x^1 & -A - B - 4C - 4D = -1, \\ x^0 & -2A + 2B - 4C + 4D = 2 \end{array}$$

Решив систему

$$\begin{cases} A + B + C + D = 0, \\ 2A - 2B + C - D = 1, \\ A + B + 4C + 4D = 1, \\ -A + B - 2C + 2D = 1, \end{cases}$$

Получим

$$A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{2}{3},\ C = -\frac{1}{3},\ D = \frac{2}{3}.$$

Тогда на основании таблицы основных интегралов и формулы (1) имеем

$$\int_7^9 \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}dx = \frac{1}{3}\int_7^9 \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int_7^9 \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{3}\int_7^9 \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3}\int_7^9 \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{3} ln|x-2|\Big|_7^9 - \frac{2}{3} ln|x+2|\Big|_7^9 - \frac{1}{3} ln|x-1|\Big|_7^9 + \frac{2}{3} ln|x+1|\Big|_7^9 =$$

$$= \frac{1}{3}(ln7 - ln5 - 2\,ln11 + 2\,ln9\_ln8 + ln6 + 2\,ln10 - 2\,ln8) =$$

$$= \frac{1}{3} ln\frac{8505}{7744} \approx 0{,}032.$$

Пример 6. Вычислить интеграл

$$\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}.$$

Решение.

На основании таблицы основных интегралов и формулы (2) имеем:

Сделаем замену $e^x + 4 = t^2$, тогда $e^x = t^2 - 4$, $e^x\,dx = 2t\,dt$,

Если $x = \ln 5$, то $t = 3$; если $x = \ln 12$, то $t = 4$. Тогда

$$\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}} = 2\int_3^4 \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_3^4 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}.$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} + 1}$$

Решение.

На основании таблицы основных интегралов и формулы (2) имеем:

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} + 1} = \left| \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ x = 4, t = 2 \\ x = 9, t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2(t - \ln(t+1))\Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4) - 2(2 - \ln 3) = 2 = 2(\ln 3 - \ln 4) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right)$$

Пример 8. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$$

Решение.

На основании таблицы основных интегралов и формулы (2) имеем:

Сделаем подстановку t = cosx

Если x = 0, то t = cos 0 = 1, если

$x = \frac{\pi}{2}$, то $t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

$dt = d(\cos x) = -\sin x dx.$

Следовательно

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^2 x dx = -\int_1^0 t^2 dt = -\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^0 = \frac{1}{3}.$$

Пример 9. Вычислить интеграл

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2 + 9}\,dx$$

Решение.

На основании таблицы основных интегралов и формулы (2) имеем:

$$t^2 = x^2 + 9.$$

Найдем пределы по t:

если $x = 0$, то $t = \sqrt{x^2+9} = \sqrt{9} = 3$;

если $x = 4$, то $t = \sqrt{x^2+9} = \sqrt{25} = 5$

Находим

$$d(t^2) = d(x^2+9); \quad 2dt = 2xdx; xdx = tdt.$$

Следовательно,

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int_3^5 t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_3^5 = \frac{98}{3}.$$

Пример 10. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{12x^5}{\sqrt{x^8+1}}dx.$$

Решение.

Хороший метод решения интегралов, это метод занесения под дифференциал, его плюс состоит в том, что не требуется менять пределы интегрирования

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{12x^5}{\sqrt{x^6+1}}dx = \frac{1}{6}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{12}{\sqrt{x^6+1}}d(x^6) = 2\int_0^{\sqrt{3}} (x^6+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^6+1) =$$
$$= 4\sqrt{x^6+1}\,\Big|_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^6+1} - 4 = 8\sqrt{7} - 4.$$

Пример 11. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$

Решение. На основании таблицы основных интегралов и формулы (3) имеем (интегрируем по частям)

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x^2; & du = 2xdx \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2 \cos x\Big|_0^{\pi} +$$
$$+ \int_0^{\pi} 2x\cos x dx = \pi^2 + 2\int_0^{\pi} x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{vmatrix} =$$
$$= \pi^2 + 2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \right) = \pi^2 + 2\cos x\Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 2 - 2 =$$
$$= \pi^2 - 4.$$

Вычислить интеграл

Основная формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^{i} f(x)dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{0}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 - 0 = 9$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\Big|_1^4 = \frac{2}{3} * 4 * \sqrt{4} - \frac{2}{3} * 1\sqrt{1} = \frac{8}{3} * 2 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} -$$
$$\frac{2}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

$$\int_{-3}^2 (2x - 3)dx = \left(\frac{2x^2}{2} - 3x\right)\Big|_{-3}^{2} = (x^2 - 3x)\,\Big|_{-3}^{2} =$$
$$(2^2 - 3 * 2) - ((-3)^2 - 3 * (-3) = 4 - 6 - 9 - 9 = -2 - 18 =$$
$$-20$$

$$\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\,\Big|_{-2\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2}\cos 2\pi + \frac{1}{2}\cos 2(-2\pi) =$$
$$-\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2}\cos(-4\pi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\int_{-2}^{-1} (5 - 4x)dx = \left(5x - 4 * \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{-1} = (5x - 2x^2)\,\Big|_{-2}^{-1} =$$
$$(-5 - 2) - (-10 - 8) = -17 + 18 = 11$$

$$\int_{-2}^{0}(2x^2-4x)dx=\left(\frac{9x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}=(3*0^2-2*0^2)-(3(-2)^2-2*(-2)^2)=0-12+8=-4$$

$$\int_0^4(x-3\sqrt{x})dx=\left(\frac{x^2}{2}-3*\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_0^4=\left(\frac{x^2}{2}-2x\sqrt{x}\right)\Big|_0^4=\left(\frac{4^2}{2}-2*4\sqrt{4}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-2*0\sqrt{0}\right)=8-16-0=-8$$

$$\int_0^3 8\cos(4x-12)\,dx=8\frac{1}{4}\sin(4x-12)\Big|_0^3=2\sin(4x-12)\Big|_0^3=2\sin(12-12)-2\sin(4*0-12)=2sin0+2sin12=2*0+2sin12=2sin12$$

$$\int_1^2 3\sin(3x-6)\,dx=-3\frac{1}{3}\cos(3x-6)\Big|_1^2=-\cos(3x-6)\Big|_1^2=-\cos(6-6)+\cos(3-6)=-cos0+cos3=-1+cos3$$

Вычисления подстановкой

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{1+cos2^x}dx=\begin{bmatrix}cos=t\,;-sinxdx=dt\\ \text{в}*\text{н}=cos\frac{\pi}{2}=0\,;\text{н}*\text{н}=cos0=1\end{bmatrix}=-\int_{-1}^{0}\frac{dt}{1+t^2}=-arctgt\Big|_1^0=-arctg0+arctg1=0+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^2\frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}}dx=\begin{bmatrix}2x^2=t\,;4xdx=dt\\ \text{в}*\text{н}=2*2^2=8;\text{н}*\text{н}=2*0^2=0\end{bmatrix}=\int_0^8\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=2\sqrt{1+t}\Big|_0^8=2\sqrt{1+8}-2\sqrt{1+0}=2*3-2=4$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{3+4x^2}=\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\frac{3}{4}+x^2}=\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+x^2}=\frac{1}{4*\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}arctg\frac{2x}{\sqrt{3}}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=$$
$$\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\sqrt{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}*\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}*\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}=\frac{2\pi-\pi}{12\sqrt{3}}=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$$

$$\int\frac{\sin x\,dx}{2\cos x+3}=\begin{bmatrix}2\cos x+3=t\\ -2\sin x\,dx=dt\\ \sin x\,dx=-\frac{1}{2}dt\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}ln|t|+C$$
$$=-\frac{1}{2}ln|2cosx+3|+C$$

Практическое занятие № 32.
Решение рациональных, логарифмических уравнений

Цель практической работы:

– закрепить теоретические знания;

– применение знаний при решении задач.

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

1. Решить логарифмические уравнение:

1) $\log_5(2x-1)=2$ **;**

2) $\lg(x-1)+\lg x=0$;

3) $\log_5\frac{1-2x}{x+3}=1$;

4) $\log_8 x+\log_{\sqrt{2}} x=14$

5) $\log_4(2x+3)=3$;

6) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$;

7) $\log_4\frac{4+2x}{x-5}=2$;

8) $\log_{\sqrt{3}} x+\log_9 x=10$

2. Решение рациональных уравнений.

1. Замена переменной.

Метод введения новой переменной заключается в том, что для решения уравнения $f(x)=0$ вводят новую переменную (подстановку) $y=g(x)$ и выражают $f(x)$ через у, получая новое уравнение $Y(y)=0$.

После этого получают совокупность уравнений, из которых находят корни исходного уравнения.

Решим уравнение:

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=-15$$

$$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=-15$$

Пусть $x^2+8x+7=a$, тогда

$$(a+7)(a+15)=-15$$

$$a^2+22a+120=0$$

$$a=-10;\ a=-12.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+8x=-10 \\ x^2+8x=-10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4\pm\sqrt{6} \\ x=-6 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Ответ: -6; -2; -4$\pm\sqrt{6}$.

2. Биквадратные уравнения.

Для решения уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0,$ где $a\neq 0,$ надо сделать подстановку $x^2=y,$ найти корни y_1 и y_2 квадратного уравнения $ay^2+by+c=0$ и решить уравнения $x^2=y_1$ и $x^2=y_2$.

Решим уравнение:

$$x^4+x^2-2=0$$

$$y^2+y-2=0$$

Пусть $x^2=y,$ тогда $y_1=-2;\ y_2=1$

$$\left[\begin{array}{l} x^2=-2 \\ x^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Ответ: -1; 1.

3. Возвратные уравнения.

Уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2+kbx+k^2a=0$ можно решить, введя новую переменную $y=x+\dfrac{k}{x}.$

Решим уравнение:

$$x^4+x^3-4x^2+3x+9=0.$$

Так как x=0 не является корнем уравнения, то разделим обе части уравнения на x^2. Получим:

$$x^2+x-4+\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}=0$$

$(x^2+\frac{9}{x^2})+(x+\frac{3}{x})-4=0$ Пусть $x+\frac{3}{x}=y,$ тогда

$$y^2+y-10=0$$

$$y_1=\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$$

$$y_2=\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{3}{x}=\frac{-1+\sqrt{41}}{2} \\ x+\frac{3}{x}=\frac{-1-\sqrt{41}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{41}\pm\sqrt{2\sqrt{41}-6}}{4}$$

Ответ: $\frac{-1-\sqrt{41}\pm\sqrt{2\sqrt{41}-6}}{4}$.

4. Симметричные уравнения

В уравнении вида $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,$ где $a\neq 0$ разделим обе части уравнения на x^2, так как x=0 не является корнем уравнения, и сделаем замену $x+\frac{1}{x}=y.$

Решим уравнение:

$$x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$$

Это уравнение является симметричным уравнением четвёртой степени. Так как x=0 не является корнем уравнения, то разделив обе части на x^2 получим:

$$x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$(x^2+\frac{1}{x^2})-5(x+\frac{1}{x})+8=0$$

Пусть $x^2+\frac{1}{x^2}=y,$ тогда: $y^2-5y+6=0$, $y_1=2,\quad y_2=3$

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=2 \\ x+\frac{1}{x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: 1; $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

5. Однородные уравнения.

Однородные уравнения обладают тем свойством, что если разделить все члены уравнения на наивысшую степень одной из переменных, то оно превращается в уравнение с одной переменной.

Решим уравнение:

$$(x^2-x+1)^3+2x^4(x^2-x+1)-3x^6=0$$

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)^3+2\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)-3=0$$

Пусть $y=\frac{x^2-x+1}{x^2}$, тогда получим:

$y^3+2y-3=0$

$y=1$

Затем, $\frac{x^2-x+1}{x^2}=1,\ \ x=1.$

Ответ: 1.

6. Метод неопределённых коэффициентов.

Довольно часто трудно увидеть требуемую группировку или формулу. Тогда можно сделать попытку реализовать метод разложения - метод неопределённых коэффициентов.

Рассмотрим уравнение четвёртой степени. Многочлен четвёртой степени можно разложить на множители так: $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=0.$

$x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd=0$

Решим уравнение $x^4+x^3-8x^2+3x+5=0.$

$$\begin{cases}a+c=1\\ b+ac+d=-8\\ bc+ad=3\\ bd=5\end{cases}$$

Так как произведение двух целых чисел равно 5, то *b*=1, *d*=-5 или *b*=-1, *d*= -5. Решением системы является *a*=-1, *b*=-1, *c*=2, *d*=-5. Тогда данное уравнение можно записать так:

$(x^2-x-1)(x+2x-5)=0$

Ответ: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};\ -1\pm\sqrt{6}.$

$x^3-4x^2-x+4=0$	$\{-1;1;4\}$;
$x^4-3x^3+3x^2-x=0$	$\{0;1\}$;
$6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$	$\left\{-3;-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right\}$;
$x^4-x^3-10x^2+2x+4=0$	$\left\{-1\pm\sqrt{3};\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$;
$(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$	$\{-2;1\}$;
$(x+1)(x+2)(x+3(x+4)=1$	$\left\{\frac{-5\pm\sqrt{5+4\sqrt{2}}}{2}\right\}$;
$x^4-12x^3+43x^2-42x+6=0$	$\left\{\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$;
$x^4-10x^3+27x^2-14x+2=0$	$\{2\pm\sqrt{3};3\pm\sqrt{7}\}$;

$$(x+5)^4-13x^2(x+5)^2+36x^4=0 \quad \left\{-\frac{5}{3};-\frac{5}{4};\frac{5}{2};5\right\};$$

$$(x^2+x+4)^2+3x(x^2+x+4)+2x^2=0 \quad \varnothing.$$

Практическое занятие № 34. Решение задач по стереометрии

Цель практической работы:

- закрепить теоретические знания;
- учить решать задачи по стереометрии

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задача 1.

Параллельные плоскости α и β пересекают стороны угла ABC в точках A_1, C_1, A_2, C_2соответственно.

Найти BC_1, если $A_1B : A_1A_1 = 1 : 3$, $BC_2 = 12$.

Решение.

Рассмотрим **рис. 1.**

1) Так как $A_1B : A_1A_2 = 1 : 3$, то $A_1B = x$, $A_1A_2 = 3x$.

2) Плоскость (ABC) пересекает плоскость α по прямой A_1C_1, а плоскость β – по прямой A_2C_2. Так как плоскости α и β параллельны, то параллельны и прямые A_1C_1 и A_2C_2.

3) Рассмотрим угол ABC. По теореме Фалеса выполняется:

$BA_1/BA_2 = BC_1/BC_2$.

Кроме того, $BA_2 = BA_1 + A_1A_2$, а значит, учитывая пункт 1

$BA_2 = BA_1 + A_1A_2 = x + 3x = 4x$.

Тогда $x/(4x) = BC_1/12$, то есть $BC_1 = 3$.

Ответ: 3.

Задача 2.

В ромбе ABCD угол A равен 60°, сторона ромба равна 4. Прямая AE перпендикулярна плоскости ромба. Расстояние от точки E до прямой DC равно 4. Найти квадрат расстояния от точки A до плоскости EDC.

Решение.

1) Проведем AH перпендикулярно DC **(рис. 2)**, тогда EH перпендикулярно DC по теореме о трех перпендикулярах. Значит EH – расстояние от точки E до прямой DC, то есть EH = 4.

2) Проведем AK – высоту треугольника AEH – и докажем, что AK – расстояние от точки A до плоскости (EDC):

DC перпендикулярно AH и DC перпендикулярно EH, значит, DC перпендикулярно плоскости (AEH) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. AK содержится в плоскости (AEH), значит AK перпендикулярно DC. Кроме того, AK перпендикулярна EH по построению. Так как прямая AK перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим

в плоскости EDC (EH и DC), то AK перпендикулярно плоскости (EDC), значит, AK – расстояние от точки A до плоскости (EDC).
3) Рассмотрим треугольник ADH: AD = 4, угол ADH = 60° (накрест лежащий с углом BAD), тогда AH = AD · sin ADH. Имеем, что $AH = 4 \cdot \sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3}$.
4) Рассмотрим треугольник EAH – прямоугольный (угол EAH = 90°). По теореме Пифагора
$EH^2 = EA^2 + AH^2$;
$EA^2 = 16 – 12 = 4$;
EA = 2.
Для площади треугольника EAH можно использовать формулы
$S_{EAH} = (EA \cdot AH)/2$ или $S_{EAH} = (AK \cdot EH)/2$, тогда
$EA \cdot AH = AK \cdot EH$ или $AK = (EA \cdot AH)/EH$.
Имеем: $AK = (2 \cdot 2\sqrt{3})/4 = \sqrt{3}$, поэтому $AK^2 = 3$.
Ответ: 3.

Задача 3.
В треугольнике ABC угол B – прямой, BC = 2. Проекцией этого треугольника на некоторую плоскость является треугольник BDC, AD = √2, угол между плоскостями ABC и BCD равен 45°. Найти угол (в градусах) между прямой AC и плоскостью (BDC).
Решение.
1) По теореме о трех перпендикулярах BD перпендикулярно BC, тогда угол между плоскостями (ABC) и (BDC) – есть угол ABD равный 45° **(рис. 3)**.
2) AC – наклонная, AD – перпендикуляр к плоскости (BCD), CD – проекция AC на плоскость (BCD), значит угол ACD равен углу между прямой AC и плоскостью (BDC), то есть угол ACD – искомый.
3) Рассмотрим треугольник ABD – прямоугольный (угол ABD = 90°):
AB = AD/sin ABD;
$AB = \sqrt{2}/(\sqrt{2}/2) = 2$.
4) Рассмотрим треугольник ABC – прямоугольный (угол ABC = 90°). По теореме Пифагора
$AC^2 = AB^2 + BC^2$;
$AC^2 = 4 + 4 = 8$;
$AC = 2\sqrt{2}$.
5) Рассмотрим треугольник ACD – прямоугольный (угол ADC = 90°):
так как AD = 1/2 AC, то угол ACD = 30°.
Ответ: 30°.

Задача 4.
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Найти угол (в градусах) между AB_1 и BD_1.
Решение.
Рассмотрим **рис. 4.**
1) Прямая AB_1 содержится в плоскости (AA_1B_1), прямая BD_1 пересекает плоскость (AA_1B_1) в точке B, но B не принадлежит AB_1, значит прямые AB_1 и BD_1 скрещивающиеся (по признаку скрещивающихся прямых) **(рис. 4)**.
2) Введем прямоугольную систему координат с началом отсчета в точке B и единичным отрезком, равным по длине ребру куба.
3) Определим координаты точек B, D_1, A, B_1 в заданной системе координат:
B(0; 0; 0);

$D_1(1; 1; 1)$;
$A(1; 0; 0)$;
$B_1(0; 0; 1)$, тогда вектор BD_1 {1; 1; 1}, а вектор AB_1 – {-1; 0; 1}.
4) Найдем скалярное произведение векторов BD_1 и AB_1:
BD_1 и $AB_1 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0$.
Так как скалярное произведение векторов равно нулю, то они взаимно перпендикулярны, значит, угол между AB_1 и BD_1 равен 90°.

Задача 5.
Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна 8. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найти значение выражения √3 · V, где V – объем пирамиды.
Решение.
Так как по условию четырехугольная пирамида правильная, то в ее основании лежит квадрат ABCD **(рис. 5)**.
1) Высота пирамиды PO проецируется в центр основания (точку O – точку пересечения диагоналей квадрата ABCD).
2) Угол между прямой PC и плоскостью (ABC) равен плоскому углу PCO и равен 60°.
3) Рассмотрим треугольник POC – прямоугольный (угол POC = 90°):
$PO = PC \cdot \sin PCO$;
$OC = PC \cdot \cos PCO$;
$PO = 8 \cdot \sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3}$;
$OC = 8 \cdot 1/2 = 4$.
4) Рассмотрим квадрат ABCD:
$AC = 2 \cdot OC = 2 \cdot 4 = 8$, тогда $S_{ABCD} = d^2/2$, где d – диагональ квадрата, то есть $S_{ABCD} = 64/2 = 32$.
5) $V = 1/3\ S_{осн} \cdot h$;
$V = 1/3 \cdot 32 \cdot 4\sqrt{3} = 128\sqrt{3}/3$.
6) $\sqrt{3} \cdot V = \sqrt{3} \cdot 128\sqrt{3}/3 = 128$.
Ответ: 128.

Практическое занятие № 35. Вычисление объемов тел и поверхностей вращения

Цель практической работы:
закрепить теоретические знания;
студент должен:
знать:
– формулы объемов тел и поверхностей вращения;
уметь:
– вычислять объемы тел и поверхностей вращения.
Задачи практической работы:
1.Проверить знания теоретического материала.
2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Сведения из теории:

Объем прямоугольного параллелепипеда $V=abc$, где a, b, c – стороны параллелепипеда.

Объем куба $V=a^3$, где a – длина грани куба.

Объем призмы

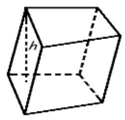


Рисунок 70. Призма

Объем призмы равен произведению площади основания призмы, на высоту: $V=S_o h$,
где S_o – площадь основания призмы, h – высота призмы.

Объем параллелепипеда

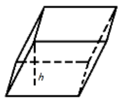


Рисунок 71. Параллелепипед

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту: $V=S_o \cdot h$,
где S_o – площадь основания, h – длина высоты.

Объем прямоугольного параллелепипеда

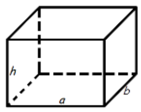


Рисунок 72. Прямоугольный параллелепипед

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты:

$$V=a \cdot b \cdot h,$$

где a – длина, b – ширина, h – высота.

Объем пирамиды

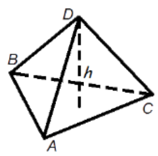


Рисунок 73. Пирамида

Объем пирамиды равен трети от произведения площади ее основания на высоту: $V=\frac{1}{3}S_o h$,

где S_o – площадь основания пирамиды, h – длина высоты пирамиды.

Объем правильного тетраэдра

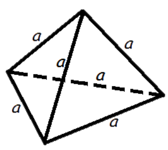


Рисунок 74. Тетраэдр

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12},$$

где a – длина ребра правильного тетраэдра.

Объем цилиндра

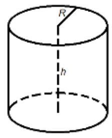


Рисунок 75. Цилиндр

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту: $V=\pi R^2h$
или $V=S_oh$,
где S_o – площадь основания цилиндра, R – радиус цилиндра, h – высота цилиндра, π=3,141592.

Объем конуса

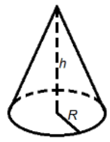


Рисунок 76. Конус

Объем конуса равен трети от произведения площади его основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

или

$$V = \frac{1}{3}S_o h,$$

где S_o – площадь основания конуса, R – радиус основания конуса, h – высота конуса, π=3,141592.

Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара, π=3,141592.

Задача 1.
Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.
Решение:
обозначим ребро куба за x и составим уравнение:

$$(x+2)^3=x^3+98,$$
$$x^3+6x^2+12x+8=x^3+98,$$
$$6x^2+12x-90=0,$$
$$x^2+2x-15=0,$$
$$x_1=-5,\ x_2=3.$$

x_1=-5 – не удовлетворяет условию задачи.
Ответ: 3.

Задача 2.
Прямоугольный лист жести, имеющий 1,6 м длины и 0,8 м ширины, можно согнуть в трубку двояким образом: в первом случае длина трубки будет 1,6 м, во втором 0,8 м. Найти отношение объемов трубок.
Решение:
трубки образуют цилиндры, объем, которого вычисляется по формуле:

$$V=\pi R^2 h.$$

У первого цилиндра высота будет 1,6 м, тогда радиус 0,4 м. Во втором цилиндре высота будет 0,8 м, тогда радиус 0,8 м. Вычислим отношение объемов двух цилиндров:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi 0{,}4^2 1{,}6}{\pi 0{,}8^2 0{,}8}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 1:2.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Измерения прямоугольного параллелепипеда: 15 *м*, 50 *м* и 36 *м*. Найти ребро равновеликого ему куба.

2) Измерения прямоугольного бруса: 3 *см*, 4 *см* и 5 *см*. Если увеличить каждое его ребро на *x см*, то поверхность увеличится на 54 *см*^{2}. Как увеличится его объем?

3) Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 4. Найти объем цилиндра.

4) Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 9 *м* и 12 *м*, каждое из боковых ребер равно 12,5 *м*. Найти объем пирамиды.

5) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны по 6 *см*, а основание 8 *см*. Боковые ребра равны между собой и равны 9 *см*. Найти объем пирамиды.

6) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 *см* и 15 *см* и образуют угол в 60^0. Меньшая диагональ параллелепипеда составляем с плоскостью основания угол 30^0. Найти объем параллелепипеда.

7) Высота и образующая конуса относятся как 4:5, а объем конуса равен 96π *см*^{3}. Найти полную поверхность конуса.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы объемов тел и поверхностей вращения.

Практическое занятие № 36-37. Решение задач по стереометрии

Цель практической работы:

– закрепить теоретические знания;

– учить решать задачи по стереометрии

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задача 1.

Параллельные плоскости α и β пересекают стороны угла ABC в точках A_1, C_1, A_2, C_2соответственно.

Найти BC_1, если $A_1B : A_1A_1 = 1 : 3$, $BC_2 = 12$.

Решение.
Рассмотрим **рис. 1.**
1) Так как $A_1B : A_1A_2 = 1 : 3$, то $A_1B = x$, $A_1A_2 = 3x$.
2) Плоскость (ABC) пересекает плоскость α по прямой A_1C_1, а плоскость β – по прямой A_2C_2. Так как плоскости α и β параллельны, то параллельны и прямые A_1C_1 и A_2C_2.
3) Рассмотрим угол ABC. По теореме Фалеса выполняется:
$BA_1/BA_2 = BC_1/BC_2$.
Кроме того, $BA_2 = BA_1 + A_1A_2$, а значит, учитывая пункт 1
$BA_2 = BA_1 + A_1A_2 = x + 3x = 4x$.
Тогда $x/(4x) = BC_1/12$, то есть $BC_1 = 3$.
Ответ: 3.

Задача 2.
В ромбе ABCD угол A равен 60°, сторона ромба равна 4. Прямая AE перпендикулярна плоскости ромба. Расстояние от точки E до прямой DC равно 4. Найти квадрат расстояния от точки A до плоскости EDC.
Решение.
1) Проведем AH перпендикулярно DC **(рис. 2)**, тогда EH перпендикулярно DC по теореме о трех перпендикулярах. Значит EH – расстояние от точки E до прямой DC, то есть EH = 4.
2) Проведем AK – высоту треугольника AEH – и докажем, что AK – расстояние от точки A до плоскости (EDC):
DC перпендикулярно AH и DC перпендикулярно EH, значит, DC перпендикулярно плоскости (AEH) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. AK содержится в плоскости (AEH), значит AK перпендикулярно DC. Кроме того, AK перпендикулярна EH по построению. Так как прямая AK перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости EDC (EH и DC), то AK перпендикулярно плоскости (EDC), значит, AK – расстояние от точки A до плоскости (EDC).
3) Рассмотрим треугольник ADH: AD = 4, угол ADH = 60° (накрест лежащий с углом BAD), тогда $AH = AD \cdot \sin ADH$. Имеем, что $AH = 4 \cdot \sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3}$.
4) Рассмотрим треугольник EAH – прямоугольный (угол EAH = 90°). По теореме Пифагора
$EH^2 = EA^2 + AH^2$;
$EA^2 = 16 – 12 = 4$;
EA = 2.
Для площади треугольника EAH можно использовать формулы
$S_{EAH} = (EA \cdot AH)/2$ или $S_{EAH} = (AK \cdot EH)/2$, тогда
$EA \cdot AH = AK \cdot EH$ или $AK = (EA \cdot AH)/EH$.
Имеем: $AK = (2 \cdot 2\sqrt{3})/4 = \sqrt{3}$, поэтому $AK^2 = 3$.
Ответ: 3.

Задача 3.
В треугольнике ABC угол B – прямой, BC = 2. Проекцией этого треугольника на некоторую плоскость является треугольник BDC, AD = √2, угол между плоскостями ABC и BCD равен 45°. Найти угол (в градусах) между прямой AC и плоскостью (BDC).
Решение.
1) По теореме о трех перпендикулярах BD перпендикулярно BC, тогда угол между плоскостями (ABC) и (BDC) – есть угол ABD равный 45° **(рис. 3)**.

2) AC – наклонная, AD – перпендикуляр к плоскости (BCD), CD – проекция AC на плоскость (BCD), значит угол ACD равен углу между прямой AC и плоскостью (BDC), то есть угол ACD – искомый.
3) Рассмотрим треугольник ABD – прямоугольный (угол ABD = 90°):
AB = AD/sin ABD;
AB = √2/(√2/2) = 2.
4) Рассмотрим треугольник ABC – прямоугольный (угол ABC = 90°). По теореме Пифагора
$AC^2 = AB^2 + BC^2$;
$AC^2 = 4 + 4 = 8$;
AC = 2√2.
5) Рассмотрим треугольник ACD – прямоугольный (угол ADC = 90°):
так как AD = 1/2 AC, то угол ACD = 30°.
Ответ: 30°.

Задача 4.
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Найти угол (в градусах) между AB_1 и BD_1.
Решение.
Рассмотрим **рис. 4.**
1) Прямая AB_1 содержится в плоскости (AA_1B_1), прямая BD_1 пересекает плоскость (AA_1B_1) в точке B, но B не принадлежит AB_1, значит прямые AB_1 и BD_1 скрещивающиеся (по признаку скрещивающихся прямых) **(рис. 4)**.
2) Введем прямоугольную систему координат с началом отсчета в точке B и единичным отрезком, равным по длине ребру куба.
3) Определим координаты точек B, D_1, A, B_1 в заданной системе координат:
B(0; 0; 0);
D_1(1; 1; 1);
A(1; 0; 0);
B_1(0; 0; 1), тогда вектор BD_1 {1; 1; 1}, а вектор AB_1 – {-1; 0; 1}.
4) Найдем скалярное произведение векторов BD_1 и AB_1:
BD_1 и $AB_1 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0$.
Так как скалярное произведение векторов равно нулю, то они взаимно перпендикулярны, значит, угол между AB_1 и BD_1 равен 90°.

Задача 5.
Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна 8. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найти значение выражения $\sqrt{3} \cdot V$, где V – объем пирамиды.
Решение.
Так как по условию четырехугольная пирамида правильная, то в ее основании лежит квадрат ABCD **(рис. 5)**.
1) Высота пирамиды PO проецируется в центр основания (точку O – точку пересечения диагоналей квадрата ABCD).
2) Угол между прямой PC и плоскостью (ABC) равен плоскому углу PCO и равен 60°.
3) Рассмотрим треугольник POC – прямоугольный (угол POC = 90°):
$PO = PC \cdot \sin PCO$;
$OC = PC \cdot \cos PCO$;

PO = 8 · √3/2 = 4√3;
OC = 8 · 1/2 = 4.
4) Рассмотрим квадрат ABCD:
AC = 2 · OC = 2 · 4 = 8, тогда $S_{ABCD} = d^2/2$, где d – диагональ квадрата, то есть S_{ABCD} = 64/2 = 32.
5) V = 1/3 $S_{осн}$ · h;
V = 1/3 · 32 · 4√3 = 128√3/3.
6) √3 · V = √3 · 128√3/3 = 128.
Ответ: 128.

Практическое занятие № 38. Решение задач на построение сечений

Цель практической работы:

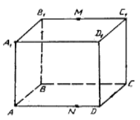
- закрепить теоретические знания;
- учить решать задачи

Задачи практической работы:

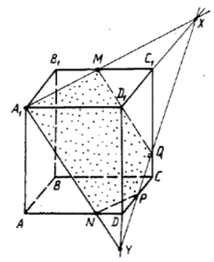
1.Проверить знания теоретического материала.
2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

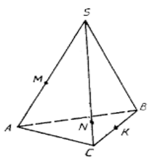
Задача 1. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: A_1; M ∈ B_1C_1; N ∈ AD.



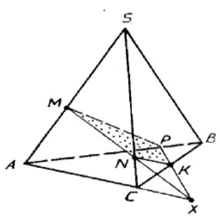
1) $A \leftrightarrow M$;
2) $A_1M \cap D_1C_1 = X$;
3) $A_1 \leftrightarrow N$;
4) $A_1N \cap DD_1 = Y$;
5) $X \leftrightarrow Y$;
6) $XY \cap CC_1 = Q$;
7) $XY \cap DC_1 = P$;
8) $M \leftrightarrow Q$;
9) $N \leftrightarrow P$;
10) $A_1MQPN \rightarrow$ *Искомое сечение*



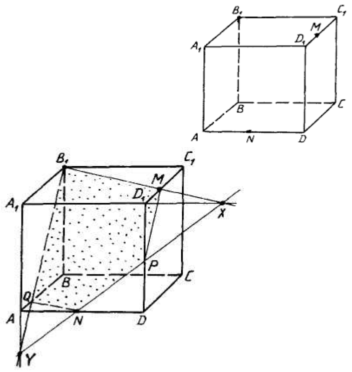
Задача 2. Построить сечение тетраэдра SABC плоскостью, проходящей через точки: M ∈ SA; N ∈ SC; K ∈ BC.



1) $M \leftrightarrow N$;
2) $MN \cap AC = X$;
3) $X \leftrightarrow K$;
4) $XK \cap AB = P$;
5) $P \leftrightarrow M$;
6) $MNKP \rightarrow$ *искомое сечение*

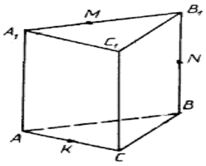


Задача 3. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: M ∈ C_1D_1; B_1 и N ∈ AD.

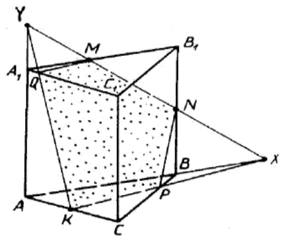


1) $B_1 \leftrightarrow M$;
2) $B_1M \cap A_1D_1 = X$;
3) $X \leftrightarrow N$;
4) $XN \cap D_1D = P$;
5) $PN \cap AA_1 = Y$;
6) $Y \leftrightarrow B_1$;
7) $YB_1 \cap AB = Q$;
8) $Q \leftrightarrow N$;
9) $B_1MPNQ \rightarrow$ *искомое сечение*

Задача 4. Построить сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$плоскостью, проходящей через точки: $M \in A_1B_1$; $N \in BB_1$ и $K \in AC$.



1) $M \leftrightarrow N$;
2) $MN \cap AB = X$;
3) $X \leftrightarrow K$;
4) $XK \cap BC = P$;
5) $MN \cap AA_1 = Y$;
6) $Y \leftrightarrow K$;
7) $YK \cap A_1C_1 = Q$;
8) $YK \cap A_1C_1 = Q$;
9) $Q \leftrightarrow M$;
10) $MNPKQ \rightarrow$ *искомое сечение*;



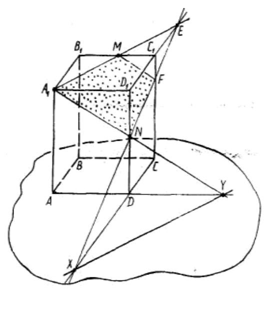
Задача 5. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки A1, $M \in B_1C_1$и $N \in DD_1$

и найти линию пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания куба.

1-я часть решения 2-я часть решения

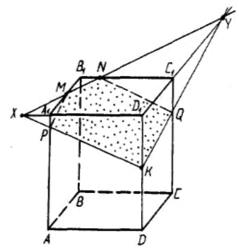
1) $A_1 \leftrightarrow N$;
2) $A_1 \leftrightarrow M$;
3) $A_1M \cap B_1C_1 = E$;
4) $E \leftrightarrow N$;
5) $EN \cap CC_1 = F$;
6) $F \leftrightarrow M$;
7) $A_1MFN \rightarrow$ *искомое сечение*;

1) $NF \cap CD = X$;
2) $A_1N \cap AD = Y$;
3) $X \leftrightarrow Y$;
4) $XY \rightarrow$ *искомая линия пересечения секущей плоскости с плоскостью основания*;



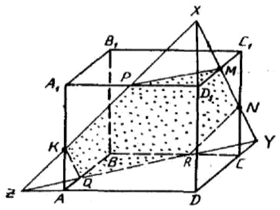
Задача 6. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $M \in A_1B_1$; $N \in B_1C_1$ и $K \in DD_1$.

1) $M \leftrightarrow N$;
2) $MN \cap A_1D_1 = X$;
3) $X \leftrightarrow K$;
4) $XK \cap AA_1 = P$;
5) $P \leftrightarrow M$;
6) $MN \cap D_1C_1 = Y$;
7) $Y \leftrightarrow K$;
8) $KY \cap CC_1 = Q$;
9) $Q \leftrightarrow N$;
10) $MNPKQ \rightarrow$ *искомое сечение;*



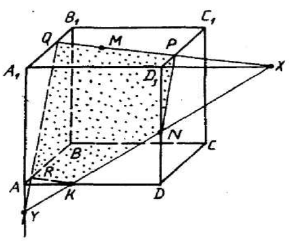
Задача 7. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки $M \in D_1C_1$, $N \in CC_1$ и $K \in AA_1$.

1) $M \leftrightarrow N$;
2) $MN \cap DD_1 = X$;
3) $X \leftrightarrow K$;
4) $P \leftrightarrow M$;
5) $MN \cap DC = Y$;
6) $PK \cap AD = Z$;
7) $Z \leftrightarrow Y$;
8) $ZY \cap AB = Q$;
9) $ZY \cap BC = R$;
10) $K \leftrightarrow Q$;
11) $R \leftrightarrow N$;
12) $MNRQKP \rightarrow$ *искомое сечение;*



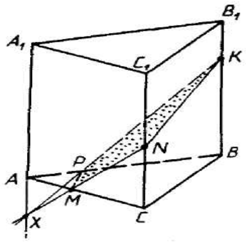
Задача 8. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $M \in$ грани $A_1B_1C_1D_1$; $N \in DD_1$ и $K \in AD$.

1) $K \leftrightarrow N$;
2) $KN \cap A_1D_1 = X$;
3) $X \leftrightarrow M$;
4) $XM \cap D_1C_1 = P$;
5) $XM \cap A_1B_1 = Q$;
6) $P \leftrightarrow N$;
7) $KN \cap AA_1 = Y$;
8) $Y \leftrightarrow Q$;
9) $YQ \cap AB = R$;
10) $P \leftrightarrow K$;
11) $PNKRQ \rightarrow$ *искомое сечение;*



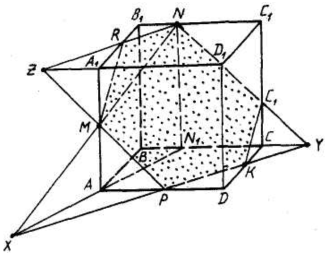
Задача 9. Построить сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки: $M \in AC$; $N \in CC_1$; $K \in BB_1$.

1) $M \leftrightarrow N$;
2) $MN \cap AA_1 = X$;
3) $X \leftrightarrow K$;
4) $XK \cap AB = P$;
5) $P \leftrightarrow M$;
6) $N \leftrightarrow K$;
7) $MNKP \rightarrow$ *искомое сечение;*



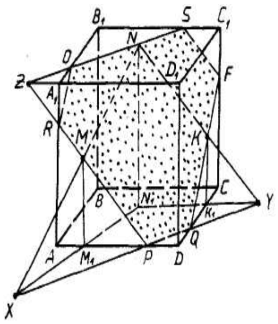
Задача 10. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $M \in AA_1$; $N \in B_1C_1$;
$K \in DC$. (Точки M, N и K лежат на скрещивающихся ребрах).

1) $NN_1 \| AA_1$;
2) $M \leftrightarrow N$;
3) $A \leftrightarrow N_1$;
4) $MN \cap AN_1 = X$;
5) $X \leftrightarrow K$;
6) $XK \cap AD = P$;
7) $M \leftrightarrow P$;
8) $XK \cap BC = Y$;
9) $Y \leftrightarrow N$;
10) $YN \cap CC_1 = Q$;
11) $Q \leftrightarrow K$;
12) $MP \cap A_1D_1 = Z$;
13) $Z \leftrightarrow N$;
14) $ZN \cap A_1B_1 = R$;
15) $M \leftrightarrow R$;
16) $MRNQKP \rightarrow$ *искомое сечение;*



Задача 11. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $M \in AA_1D_1D$; $N \in A_1B_1C_1D_1$; $K \in DDC_1C$.

1) $MM_1 \| AA_1$;
2) $NN_1 \| AA_1$, $NN_1 = AA_1$;
3) $M \leftrightarrow N$;
4) $M_1 \leftrightarrow N_1$;
5) $MN \cap M_1N_1 = X$;
6) $KK_1 \| CC_1$;
7) $N \leftrightarrow K$;
8) $N_1 \leftrightarrow K_1$;
9) $NK \cap N_1K_1 = Y$;
10) $X \leftrightarrow Y$;
11) $XY \cap AD = P$;
12) $XY \cap DC = Q$;
13) $P \leftrightarrow M$;
14) $PM \cap AA_1 = R$;
15) $Q \leftrightarrow K$;
16) $QK \cap CC_1 = F$;
17) $PR \cap D_1A_1 = Z$;
18) $Z \leftrightarrow N$;
19) $ZN \cap A_1B_1 = O$;
20) $ZN \cap B_1C_1 = S$;
21) $R \leftrightarrow O$;
22) $S \leftrightarrow F$;
23) $ROSFQP \rightarrow$ *искомое сечение;*



Задача 12. В треугольной пирамиде SABC провести сечение:
а) через середину ребра AC параллельно грани SCB;
б) через середину ребра SC параллельно грани SAB.

Задача 13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, которая проходит через данные точки: а) C_1, K, D; б) C_1, K, C, где точка K – середина A_1B_1. Определите, какая фигура образуется в сечении.

Задача 14. Точка X делит ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении AX : XB = 2 : 3. Постройте сечение этого куба плоскостью, которая параллельна плоскости AA_1C_1 и проходит через точку X. Найдите периметр сечения, если AB = a.

Ответ: $2a + \frac{6\sqrt{2}}{5}a$

Практическое занятие №39
Решение задач по теме «Цилиндр и конус»

Цель практической работы:

– закрепить теоретические знания;
– учить решать задачи по данной теме

Задачи практической работы:
1.Проверить знания теоретического материала.
2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Задание 1. Каждому ученику предлагается одна из задач на готовом чертеже.
1. Осевое сечение цилиндра – квадрат со стороной 6 см. Найти высоту и радиус основания цилиндра.
2. Высота конуса 4 см, радиус основания – 3 см. Найти образующую конуса.
3. Высота конуса 12 см, образующая – 13 см. Найти боковую поверхность конуса.

4. Радиус основания цилиндра равен 2м, высота 3м. Найти диагональ осевого сечения.
5. Осевое сечение конуса равносторонний треугольник со стороной 10см. Найти радиус основания и высоту конуса.
6. Длина окружности основания цилиндра равна 1. Площадь боковой поверхности равна 2. Найдите высоту цилиндра.

Задание 2. (у доски) Задачи.
1. Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π. 1

2. Образующая конуса равна 10, высота конуса 6. Найдите радиус конуса.2

3. Осевое сечение конуса равносторонний треугольник со стороной 10см. Найти площадь боковой поверхности конуса.3

4. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48. Угол между этой диагональю и образующей равен 30^0. Найдите радиус цилиндра.2

5. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую увеличить в 3 раза?1

6. Осевое сечение конуса равносторонний треугольник со стороной 10см. Найти радиус основания и высоту конуса.2

7. Радиус основания цилиндра равен 6, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π. 1

8. Высота конуса 12 см, образующая – 13 см. Найти боковую поверхность конуса.3

9. Длина окружности основания цилиндра равна 1. Площадь боковой поверхности равна 2. Найдите высоту цилиндра.
10. Осевое сечение конуса равносторонний треугольник со стороной 10см. Найти радиус основания и высоту конуса.

11. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом 60° и равна 20 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Самостоятельное решение задач

1. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом 60^0 и равна 20 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2. Высота конуса равна 2 коря из трёх см. Найдите площадь боковой поверхности и площадь осевого сечения конуса, если оно является правильным треугольником.

3. Высота конуса равна 2 √3 см. Найдите площадь боковой поверхности и площадь осевого сечения конуса, если оно является правильным треугольником.
4. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, а его образующая – 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

5. Длина окружности основания цилиндра равна 1. Площадь боковой поверхности равна 2. Найдите высоту цилиндра.
6. Осевое сечение конуса равносторонний треугольник со стороной 10см. Найти радиус основания и высоту конуса.

7. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом 60° и равна 20 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

8. Высота конуса равна 2 √3 см. Найдите площадь боковой поверхности и площадь осевого сечения конуса, если оно является правильным треугольником.

9. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, а его образующая – 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

На всякий случай.

- Какими предметами в форме конуса и цилиндра пользуется портной в работе? *(Напёрсток, катушка)*

- Герой этой сказки имеет отношение к предмету в виде цилиндра, потому что именно из цилиндра его и сделали. Кто этот герой? *(Буратино, полено)*

- Без этого конуса не работает телевидение *(модель телебашни)*

- Предмет косметики в форме цилиндра *(губная помада)* и т.п.

- Где в Норильске есть цилиндр, конус? *(Заводская труба)*

- Как профильтровать раствор, используя промокательную бумагу? *(Нужно сделать воронку в форме конуса и профильтровать)*

- На этом цилиндре любят селиться аисты *(водонапорная башня)* и т.п.

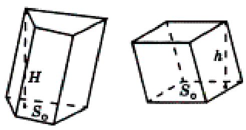
Практическое занятие №40. Отношения объемов подобных тел

Цель практической работы:
закрепить теоретические знания;
студент должен:
знать:
– формулы для вычисления объемов подобных тел;
уметь:
– вычислять объемы подобных тел.
Задачи практической работы:
1.Проверить знания теоретического материала.
2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

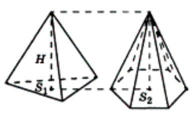
Сведения из теории:
Объемы равных тел равны
Если тело разбито на несколько тел, не имеющих общих внутренних точек, то его объем равен сумме объемов *этих* тел.
Отношение объемов подобных тел равно *кубу* коэффициента подобия.

Объем призмы равен
произведению площади ее основания на высоту: V=S_oH
или
произведению площади ее перпендикулярного сечения на боковое ребро: V=S_ol.



$$V_1 = S_oH,$$
$$V_2 = S_oh,$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{H}{h}.$$

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту:
$$V = \frac{1}{3}S_oH.$$

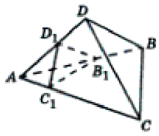


$$V_1 = \frac{1}{3}S_1H,$$
$$V_2 = \frac{1}{3}S_2H,$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Объемы призм (пирамид), *имеющих равновеликие основания*, относятся *как их высоты*.

Объемы призм (пирамид), *имеющих равные высоты*, относятся *как площади их оснований*.

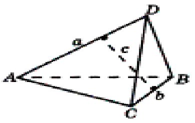
Объемы тетраэдров, имеющих *общий трехгранный угол*, относятся как *произведения ребер,* содержащих этот угол.



$$\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1}.$$

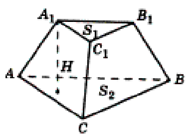
Объем тетраэдра может быть найден по формуле:

$V = \frac{1}{6} abc \sin\varphi$, где a и b – длины скрещивающихся ребер, c – расстояние между ними, φ – угол между ними.



Объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$



Объем многогранника можно получить, разбив его на не имеющие общих внутренних точек тетраэдры (*триангуляция*) и суммировав их объемы.

Если в многогранник *можно вписать шар****,*** *то объем* многогранника равен: $V = \frac{1}{3} S_{полн.} R$,

где R – радиус вписанного шара, $S_{полн.}$ – площадь полной поверхности многогранника

Задача 1 .

Чашка диаметром 8 *см* и высотой 10 *см* вмещает 0.5 литра воды. Каких размеров должна быть подобная чашка, вмещающая 4 литра воды?

Решение:

поскольку чашки – подобные цилиндры, то отношение их объёмов равно отношению кубов соответствующих отрезков (в нашем случае – высот и диаметров чашек). Следовательно, высота h новой чашки находится из отношения:

$(h/10)^3 = 4/0{,}5$, т.е. $h^3 = 8 \cdot 10^3$, откуда $h = 20$ см;

Аналогично, для диаметра d получим:

$(d/8)^3 = 4/0{,}5$, т.е. $d^3 = 8 \cdot 8^3$, откуда $d = 16$ см.

Задача 2 .

Во сколько, примерно, раз великан ростом в 2 *м* тяжелее карлика ростом в 1 *м*?

Решение:

т.к. как фигуры человеческого тела приблизительно подобны, то при вдвое большем росте человек имеет объем не вдвое, а в 8 раз больший. Значит, наш великан весит больше карлика в 8 раз. Самый высокий великан, о котором сохранились сведения, был один житель Эльзаса ростом в 275 *см* – на целый метр выше человека среднего роста. Самый маленький карлик имел высоту меньше 40 *см*, т.е. был ниже эльзасца круглым счетом в 7 раз. Поэтому если бы на одну чашку весов поставить великана – эльзасца, то на другую надо бы для равновесия поместить $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ карлика, т.е. целую толпу.

Задача 3 .

Продаются два арбуза разных размеров. Один на четвертую долю шире другого, а стоит он в полтора раза дороже. Какой из них выгоднее купить?

Решение: объем большого арбуза превышает объем меньшего в $1{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}25 = 125/64$ раза, т.е. почти вдвое. Выгоднее значит купить крупный арбуз, он дороже только в полтора раза, а съедобного вещества в нем больше раза в два.

Задача 4 .

Имеются две медные кастрюли одинаковой формы и со стенками одной толщины. Первая в 8 раз вместительнее второй. Во сколько раз она тяжелее?

Решение: обе кастрюли – тела, геометрически подобные. Если большая кастрюля в 8 раз вместительнее, то все ее линейные размеры в два раза больше: она вдвое выше и вдвое шире. Поэтому ее поверхность больше в $2 \cdot 2 = 4$ раза (поверхности подобных тел относятся, как квадраты линейных размеров). При одинаковой толщине стенок вес кастрюли зависит от величины ее поверхности.

Ответ: большая кастрюля вчетверо тяжелее меньшей кастрюли.

Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи

1) Строительный кирпич весит 4 *кг*. Сколько весит игрушечный кирпичик из того же материала, все размеры которого в 4 раза меньше?

2) Продаются две дыни одного сорта. Одна окружностью 60, другая – 50 *см*. Первая в полтора раза дороже второй. Какую дыню выгоднее купить?

3) Мякоть вишни окружает косточку слоем такой же толщины, как и сама косточка. Будем считать, что и вишня и косточка имеют форму шариков. Можете ли вы сообразить в уме, во сколько раз объем сочной части вишни больше объема косточки?

4) Башня Эйфеля в Париже, 300 *м* высоты, сделана целиком из железа, которого пошло на нее около 8000000 *кг*. Я желаю заказать точную железную модель знаменитой башни, висящую всего 1 *кг*. Какой она будет высоты?

5) Что тяжелее: стакан сахарного песку или такой же стакан колотого сахара?

6) Почему лучина загорается скорее, чем толстое полено, от которого она отколота?

Контрольные вопросы:

1. Чему равны объемы равных тел?
2. Чему равно отношение объемов подобных тел?
3. Чему равно отношение объемов призм, пирамид?

Практическое занятие №41. Вычисление объемов тел и поверхностей вращения

Цель практической работы:
закрепить теоретические знания;
студент должен:
знать:
– формулы объемов тел и поверхностей вращения;
уметь:
– вычислять объемы тел и поверхностей вращения.
Задачи практической работы:
1.Проверить знания теоретического материала.
2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Сведения из теории:
Объем прямоугольного параллелепипеда $V=abc$, где a, b, c – стороны параллелепипеда.

Объем куба $V=a^3$, где a – длина грани куба.

Объем призмы

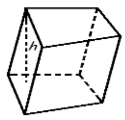


Рисунок 70. Призма

Объем призмы равен произведению площади основания призмы, на высоту: $V=S_o h$,
где S_o – площадь основания призмы, h – высота призмы.

Объем параллелепипеда

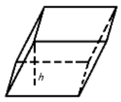


Рисунок 71. Параллелепипед

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту: $V=S_o \cdot h$,
где S_o – площадь основания, h – длина высоты.

Объем прямоугольного параллелепипеда

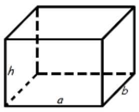


Рисунок 72. Прямоугольный параллелепипед

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты:

$$V=a \cdot b \cdot h,$$

где a – длина, b – ширина, h – высота.

Объем пирамиды

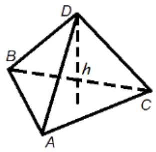


Рисунок 73. Пирамида

Объем пирамиды равен трети от произведения площади ее основания на высоту: $V = \frac{1}{3} S_o h$,

где $S_о$ – площадь основания пирамиды, h – длина высоты пирамиды.

Объем правильного тетраэдра

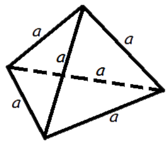


Рисунок 74. Тетраэдр

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12},$$

где a – длина ребра правильного тетраэдра.

Объем цилиндра

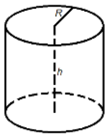


Рисунок 75. Цилиндр

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту: $V=\pi R^2 h$

или $V=S_о h$,

где $S_о$ – площадь основания цилиндра, R – радиус цилиндра, h – высота цилиндра, π=3,141592.

Объем конуса

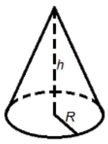


Рисунок 76. Конус

Объем конуса равен трети от произведения площади его основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

или

$$V = \frac{1}{3} S_o h,$$

где $S_о$ – площадь основания конуса, R – радиус основания конуса, h – высота конуса, π=3,141592.

Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара, π=3,141592.

Задача 1.

Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

Решение:
обозначим ребро куба за x и составим уравнение:

$$(x+2)^3=x^3+98,$$
$$x^3+6x^2+12x+8=x^3+98,$$
$$6x^2+12x-90=0,$$
$$x^2+2x-15=0,$$
$$x_1=-5,\ x_2=3.$$

$x_1=-5$ – не удовлетворяет условию задачи.
Ответ: 3.

Задача 2.
Прямоугольный лист жести, имеющий 1,6 м длины и 0,8 м ширины, можно согнуть в трубку двояким образом: в первом случае длина трубки будет 1,6 м, во втором 0,8 м. Найти отношение объемов трубок.
Решение:
трубки образуют цилиндры, объем, которого вычисляется по формуле:

$$V=\pi R^2 h.$$

У первого цилиндра высота будет 1,6 м, тогда радиус 0,4 м. Во втором цилиндре высота будет 0,8 м, тогда радиус 0,8 м. Вычислим отношение объемов двух цилиндров:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi 0{,}4^2 1{,}6}{\pi 0{,}8^2 0{,}8}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 1:2.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Измерения прямоугольного параллелепипеда: 15 *м*, 50 *м* и 36 *м*. Найти ребро равновеликого ему куба.

2) Измерения прямоугольного бруса: 3 *см*, 4 *см* и 5 *см*. Если увеличить каждое его ребро на *x см*, то поверхность увеличится на 54 *см*^{2}. Как увеличится его объем?

3) Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 4. Найти объем цилиндра.

4) Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 9 *м* и 12 *м*, каждое из боковых ребер равно 12,5 *м*. Найти объем пирамиды.

5) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны по 6 *см*, а основание 8 *см*. Боковые ребра равны между собой и равны 9 *см*. Найти объем пирамиды.

6) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 *см* и 15 *см* и образуют угол в 60^0. Меньшая диагональ параллелепипеда составляем с плоскостью основания угол 30^0. Найти объем параллелепипеда.

7) Высота и образующая конуса относятся как 4:5, а объем конуса равен 96π *см*^{3}. Найти полную поверхность конуса.

Контрольные вопросы:

2. Запишите формулы объемов тел и поверхностей вращения.

Практическое занятие №42. Итоговая контрольная работа

Цель практической работы:

Проверка умений и навыков, полученных при изучении курса математики

Задачи практической работы:

1.Проверить знания теоретического материала.

2. Выполнить задания.

Содержание и последовательность выполнения заданий

Вариант 1

1. **Какое из указанных чисел является значением выражения** $\frac{0{,}5}{1-0{,}7}$

1) $\frac{2}{3}$
2) 1,2
3) 1,5
4) $1\frac{2}{3}$

2. **Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно купить на 100 рублей после повышения цены на 20 %**

1) 4
2) 6
3) 5
4) 7

3. **Найдите** $\sin\alpha$ **, если** $\cos\alpha = 0{,}5$ **,** $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2) 0
3) $\frac{1}{2}$
4) 1

4. **В сборнике по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достается один случайно выбранный билет из этого сборника. Какова вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах?**

1) 0,92
2) 0,08
3) 0,80
4) 0,25

5. **Упростите выражение и выберите правильный ответ** $\sqrt{48}+\sqrt{75}-\sqrt{108}$

1) $3\sqrt{3}$
2) $2\sqrt{3}$
3) $5\sqrt{3}$
4) $4\sqrt{3}$

6. **Определите угловой коэффициент прямой** $9x+3y-1=0$

1) 9
2) $\frac{1}{3}$
3) -3
4) $-\frac{1}{3}$

7. **Предел функции** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ **равен**

1) 3

2) $\frac{1}{3}$

3) 2

4) $\frac{1}{9}$

8. Объем первого цилиндра равен 12 см^3. Найдите объем второго цилиндра , если при равных диаметрах, его высота в три раза больше чем у первого.

1) 36
2) 15
3) 117
4) 48

9. Площадь полной поверхности куба 54 см^2. Найдите длину ребра.

1) 6
2) 3
3) 9
4) 13,5

10. Общее количество граней у тетраэдра равно

1) 3
2) 6
3) 5
4) 4

11. Число сочетаний 4 элементов по 3 равно

1) 4
2) 24
3) 3
4) 12

<u>При выполнение задания 12-14 укажите сначала номер задания , а затем запишите его решение</u>

12. Найдите промежутки монотонности для функции $y = 5x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями $y = 3x - x^2$; $y = 0$

14. Найдите значение выражения $(x-2)^2 - 2(x-2)(x+2) + (x+2)^2$, при $x = \frac{3}{4}$

<u>Вариант 2</u>

1. Какое из указанных чисел является значением выражения $\frac{0{,}3 \cdot 4{,}4}{0{,}8}$

1) 16,5
2) 5,5
3) 0,66
4) 1,65

2. Билет в кино стоит 50 рублей. Какое максимальное число билетов можно купить на 200 рублей после повышения цены на 20 %

1) 4
2) 6
3) 3
4) 5

3. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\frac{1}{2}$
4) 1

4. В сборнике по биологии всего 30 билетов, в шести из них встречаются вопросы о цветах. На экзамене школьнику достается один случайно выбранный билет из этого сборника. Какова вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о цветах?

1) 0,2
3) 0,5
2) 0,8
4) 5

5. Упростите выражение и выберите правильный ответ $\sqrt{80}+\sqrt{20}-\sqrt{5}$

1) $3\sqrt{5}$
3) $5\sqrt{5}$
2) $2\sqrt{5}$
4) $4\sqrt{5}$

6. Определите угловой коэффициент прямой $4x-2y+5=0$

1) -2
3) 2
2) $\frac{1}{2}$
4) $-\frac{1}{2}$

7. Предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$ **равен**

1) 2
3) 4
2) $\frac{1}{4}$
4) $\frac{1}{2}$

8. Объем первого цилиндра равен 10 см^3. Найдите объем второго цилиндра , если при равных диаметрах, его высота в два раза больше чем у первого.

1) 2,5
3) 40
2) 5
4) 20

9. Площадь полной поверхности куба 96 см^2. Найдите длину ребра.

1) 6
3) 9
2) 4
4) 3

10. Общее количество граней у октаэдра равно

1) 4
3) 5
2) 6
4) 8

11. Число сочетаний 5 элементов по 3 равно

1) 20
4) 50
2) 30
3) 10

При выполнение задания 12-14 укажите сначала номер задания , а затем запишите его решение

12. Найдите промежутки монотонности для функции $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-5x$

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями $y = 6x - 2x^2$; $y = 0$

14. Найдите значение выражения $(x-3)^2 - 2(x-3)(x+3) + (x+3)^2$, при $x = \frac{1}{3}$

5. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ.

Оценка теоретических знаний

Оценка 5 – «отлично» выставляется, если обучающийся имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий используемых в работе, смог ответить на все уточняющие и дополнительные вопросы.

Оценка 4 – «хорошо» выставляется, если обучающийся показал знание учебного материала, усвоил основную литературу, смог ответить почти полно на все заданные дополнительные и уточняющие вопросы.

Оценка 3 – «удовлетворительно» выставляется, если обучающийся в целом освоил материал практической работы, ответил не на все уточняющие и дополнительные вопросы.

Оценка 2 – «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практической работы, который полностью не раскрыл содержание вопросов, не смог ответить на уточняющие и дополнительные вопросы.

Оценка практических навыков

Оценка «5» - ставится, если обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, определяет взаимосвязи между показателями задачи, даёт правильный алгоритм решения, определяет междисциплинарные связи по условию задания.

Оценка «4» - ставится, если обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, допуская незначительные неточности при решении задач, имея неполное понимание междисциплинарных связей при правильном выборе алгоритма решения задания.

Оценка «3» - ставится, если обучающийся затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, дает неполный ответ, требующий наводящих вопросов преподавателя, выбор алгоритма решения задачи возможен при наводящих вопросах преподавателя.

Оценка «2» - ставится, если обучающийся дает неверную оценку ситуации, неправильно выбирает алгоритм действий.

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Методические рекомендации разработаны в соответствии с программой учебной дисциплины БД.5 Математика и предназначены для обучающихся специальности 34.02.01 Сестринское дело

Самостоятельная работа выполняется обучающимся по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа обучающихся, оказывающая эффективное влияние на формирование личности будущего специалиста, планируется обучающимся самостоятельно. Каждый обучающийся сам определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет самостоятельную работу по личному, индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, располагаемого времени и других условий.

Во время самостоятельной подготовки обучающиеся должны быть обеспечены доступом к современным профессиональным базам данных, к информационным ресурсам сети Интернет.

Объем времени, отведенный на самостоятельную работу, представляет собой логическое продолжение аудиторных занятий.

В ходе самостоятельной работы при изучении дисциплины БД.5 Математика обучающимся рекомендуется обратить внимание на следующие основные вопросы:

1. Что называется вектором.
2. Какие бывают векторы на плоскости.
3.Чему равно скалярное произведение векторов.
4.Чему равна длина вектора.
5. Как найти угол между векторами.
6. Чему равен угол между векторами.
7. Чему равна длина вектора.
8. Чему равно скалярное произведение векторов.
9. Чему равно векторное произведение векторов.
10. Начальное понятие стереометрии (определение, основные понятия).
11. Аксиомы стереометрии.
12. Следствия из аксиом.
13. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
14. Взаимное расположение прямой и плоскости.
15. Признак параллельности прямой и плоскости.
16. Признак параллельности двух плоскостей.
17.Теоремы о параллельных плоскостях.
18. Изображение фигур в стереометрии.
19. Векторы в пространстве.
20. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
21. Прямоугольные.
22. Длина вектора.
23. Угол между векторами.
24. Условия перпендикулярности векторов.
25. Условие параллельности двух плоскостей.
26..Угол между двумя плоскостями.
27. Что называется функцией.
28. Что такое область определения и область значений функции.
29. Что называется графиком функции.
30. Что называется производной функции.

31. Каков геометрический смысл производной.
32. Каков физический смысл производной.
33. Какие свойства производной вы знаете.
34. По каким формулам вычисляются производные тригонометрических функций.
35. По каким формулам вычисляются производные степенной функции.
36. По каким формулам вычисляются производные показательной функции.
37. По каким формулам вычисляются производные логарифмической функции.

При изучении дисциплины БД.5 Математика рекомендуется следующая последовательность обучения: вначале обучающимся необходимо ознакомиться и проработать учебный материал по учебникам и лекциям, затем следует обратиться к дополнительной литературе.

7. ЦЕЛИ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен уметь:

– выполнять тождественные преобразования выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические выражения;

– строить графики степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций;

– решать простейшие уравнения и неравенства, содержащие степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции;

– изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости;

– выполнять операции над векторами и пользоваться свойствами этих операций.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен знать:

– свойства арифметического корня натуральной степени;
– свойства степени с рациональным показателем;
– свойства логарифмов и основное логарифмическое тождество;
– основные тригонометрические формулы;
– таблицу производных элементарных функций;
– аксиомы стереометрии, основные понятия и уметь применять их при решении задач математики в профессиональной деятельности и при освоении

8. ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ БД.5 МАТЕМАТИКА

– Подготовка рефератов (докладов, сообщений, эссе)
– Составление схем
– Решение практических заданий
– Составление и решение тестовых заданий
– Подготовка ответов на контрольные вопросы

– Систематическая проработка конспектов занятий, учебной и специальной юридической литературы (по вопросам к параграфам, главам учебных пособий, составленным преподавателем).

РАБОТА С ТЕКСТОМ НПА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПРАВОЧНО-ПРАВОВЫХ СИСТЕМ, ПРЕДОСТАВЛЕННЫХ СЕТЬЮ INTERNET.

Во время самостоятельной деятельности, в процессе лекционных и семинарских занятий у обучающихся формируются навыки работы с нормативно-правовыми актами, регулирующими рациональное использование природных ресурсов и защиту окружающей природной среды.

Прежде чем приступить к анализу первоисточника, необходимо прочитать документ, получить представление о его структуре. Это первый аспект работы с текстом правового документа. Второй аспект представляет собой запись основных положений и идей первоисточника.

Обучающиеся в ходе работы с правовым актом воспроизводят отдельные положения текста, осуществляют его анализ.

Особое внимание следует обратить на встречающиеся в первоисточнике экологические термины. Без усвоения основных терминов невозможно эффективное изучение правового источника, его понимание.

После ознакомления с текстом и терминами следует приступить к выполнению поставленного задания. На данном этапе обучающиеся самостоятельно ищут ответы на поставленные перед ними вопросы. Эта деятельность помогает развитию умения структурировать информацию, выделять основные моменты.

В результате систематической работы с текстом нормативно-правового акта у обучающегося развивается умение самостоятельно вести поиск правовой базы, уяснять смысл правовых терминов, использовать их в практической работе.

Для того чтобы обучающийся имел постоянный доступ к НПА он может использовать сеть Internet.

Одним из эффективных путей совершенствования самостоятельной работы является использование обучающимся Интернет-ресурсов, основными достоинствами которых являются:

– реализации принципа индивидуальной работы;

– наличие быстрой обратной связи; большие возможности наглядного предъявления материала; активность обучающихся; креативность.

Кроме того, одним из достоинств Интернета является предоставление бесплатного доступа к справочно-правовым системам.

На сегодняшний день в России и СНГ существует множество справочно-правовых систем, основные среди них:

– Гарант, КонсультантПлюс, Кодекс; Референт Государственные системы;

– Информационно-поисковая система «Закон» (ИПС «Закон»), Научно- технический центр правовой информации «Система» (НТЦ «Система»);

– Федеральное бюджетное государственное учреждение «Научный центр правовой информации при Министерстве юстиции Российской Федерации»;

– (http://www.scli.ru/bd)., Информационно-правовая система «Законодательство России» (http: //pravo. gov. ru/ip s. html).

Все это позволяет обучающемуся найти необходимый НПА в действующей редакции, с актуальными изменениями в законодательстве.

9. ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ БД.5 МАТЕМАТИКА

№ п/п	Тема самостоятельной работы	Кол-во часов	Вид самостоятельной работы	Результат работы	Сроки выполнения
1	**Тема 1.1.2** Целые и рациональные числа	1	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Подготовка ответов на контрольные вопросы. 3. Заполнение таблицы «Числа»	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
2	**Тема 1.1.3** Действительные числа	1	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Подготовка ответов на контрольные вопросы. 3. Решение примеров по образцу по теме «Действительные числа»	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
3	**Тема 1.1.4** Приближенные вычисления	1	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Подготовка к устному/письменному опросу по теме «Приближенные вычисления». 3. Решение примеров по образцу по теме «Приближенные вычисления»	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
4	**Тема 1.1.5** Теория комплексных	1	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные	на практическое занятие

	чисел		литературе. 2. Подготовка ответов на контрольные вопросы. 3. Подготовка к устному/письменному опросу по теме «Теория комплексных чисел»	задания в тетради	
5	**Тема 1.2.1** Корень n-й степени и его свойства	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Подготовка ответов на контрольные вопросы	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
6	**Тема 1.2.2** Вычисление и сравнение корней	1	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Подготовка ответов на контрольные вопросы.	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
7	**Тема 1.3.1** Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение примеров по образцу по теме «Логарифм числа».	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
8	**Тема 1.3.2** Логарифм произведения, частного, степени; переход к новому основанию	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Подготовка к устному/письменному опросу по теме «Преобразование и вычисление значений логарифмических выражений».	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие

9	**Тема 1.3.3** Логарифмы	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе.	Устные ответы на вопросы	на практическое занятие
10	**Тема 1.4.1** Радианная мера угла. Вращательное движение.	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2.Подготовка сообщения «История тригонометрии»	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
11	**Тема 1.4.2** Тригонометрические функции числового аргумента.	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение примеров по образцу	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
12	**Тема 14.3** Тригонометрические формулы	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Подготовиться к тестам	Устные ответы на вопросы Выполнение тестов	на практическое занятие
13	**Тема 1.4.4** Решение тригонометрических уравнений.	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение уравнений по образцу	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
14	**Тема 1.4.5.** Тригонометрические неравенства.	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение неравенств по образцу	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
15	**Тема 1.4. 6.** Арксинус, арккосинус, арктангенс числа	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение неравенств по образцу	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие

16	**Тема 2.1.1** Функции. Область определения и множество значений функции. Свойства функций	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
17	**Тема 2.1.2** Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума (локального максимума и минимума).	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
18	**Тема 2.2.1** Степенная функция с натуральным показателем, ее свойства и график	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
19	**Тема 2.2.2.** Тригонометрические функции, их свойства и графики; периодичность, основной период	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
20	**Тема 2.2.3** Показательная функция (экспонента),	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
21	**Тема 2.2.4.** Логарифмическая функция, ее свойства и график.	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие

22	**Тема 3.1.1.** Понятие о пределе последовательности.	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
23	**Тема 3.1.2.** Длина окружности и площадь круга как пределы последовательностей	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
24	**Тема 3.1.3.** Понятие о производной функции, физический и геометрический смысл производной	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
25	**Тема 3.1.4.** Производные суммы, разности, произведения, частного	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
26	**Тема 3.1.5.** Производные основных элементарных функций.	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
27	**Тема 3.2.1.** Первообразная	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
28	**Тема 3.2.2** Неопределенный интеграл	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе.	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие

			2. Решение задач		
29	**Тема 3.2.3** Определенный интеграл	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2 Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
30	**Тема 4.1.1** Решение рациональных, логарифмических уравнений	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение уравнений	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
31	**Тема 5.1.1** Элементарные и сложные события	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Подготовка сообщения «История происхождения теории вероятностей»	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
32	**Тема 6.1.1** Основные понятия стереометрии	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач по стереометрии	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
33	**Тема 6.1.2** Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач по стереометрии	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
34	**Тема 6.1.3** Расстояния от точки до плоскости	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
35	**Тема 6.2.1** Многогранники	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе.	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие

			2. Подготовить историческую справку «Многогранники»		
36	**Тема 6.2.2** Пирамида. Сечение многогранников	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач. Изготовление моделей многогранников.	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
37	**Тема 6.3.1.** Цилиндр, конус и их свойства.	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач. Изготовление моделей многогранников.	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
38	**Тема 6.4.1** Векторы. Действия над векторами. Базис на плоскости. Прямоугольная система координат	2	1. Отработка текущего материала по конспектам лекций и рекомендуемой литературе. 2. Решение задач	Устные ответы на вопросы Выполненные письменные задания в тетради	на практическое занятие
	Всего:	**78**			

Самостоятельная работа №1

Введение

Цель:

1. Повторить знания обучающихся по теме: «Развитие понятия о числе»
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, аналитическая обработка текста, подготовка реферата.

Задание

Написать реферат на тему «Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности»

Формат выполненной работы: реферат

Критерии оценки реферата: соответствие теме; глубина проработки материала; правильность и полнота использования источников; владение терминологией и культурой речи; оформление реферата.

Контроль выполнения: защита реферата.

Самостоятельная работа №2

Целые и рациональные числа

Цель:

1. Повторить знания обучающихся по теме: «Целые и рациональные числа»
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой

Задание 1:

1. Вычислите значение выражения: $\left(33{,}5+5\frac{5}{8}\cdot 3{,}2-15{,}7\right):\frac{1}{4}+2{,}25$
2. Разложите на множители: $(x-5)^2-16$
3. Округлите число $\frac{2}{9}$ с точностью до одной десятой и вычислите абсолютную и относительную погрешность.
4. Выполнить действия: $(4-3i)+(-2+5i)-(3+i)$
5. Вычислить с МК: $\frac{52{,}4\cdot 0{,}0673}{0{,}9\cdot 21{,}5-235{,}2-0{,}0531}$

Формат выполненной работы: выполнение практического задания,ответы с места

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;

- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии, решение выражений.

Самостоятельная работа № 3
Действительные числа

Цель:
- углубление и расширение знаний по данной теме и необходимости его изучения для будущей специальности;
- формирование умений использовать специальную и дополнительную литературу;
- развитие познавательных способностей, ответственности.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1:

Вычислить приближенные значения величин.

Вычислите следующие выражения с оценкой погрешностей, сохранив в ответе все верные цифры и одну сомнительную, если все числа даны с верными цифрами

6,14 * 652,	229,34 + 18,6,	32,297 – 1,42;
а) 646 * 72,8	б) 123 * 18.25	в) 0,142 + 11.1
96,891 – 4,25,	326 * 3,07 ,	458,67 + 37,2.
г) 0,426 * 33,3	д) 36,4 * 323	е) 246 * 36,5

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:
- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа № 4
Приближенные вычисления

Цель:
- углубление и расширение знаний по данной теме и необходимости его изучения для будущей специальности;
- формирование умений использовать специальную и дополнительную литературу;
- развитие познавательных способностей, ответственности.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений

Задание:

Пример 1. Дано число x=0,00006 и его приближение $\bar{x}$=0,00005. Найти абсолютную и относительную погрешности приближения.

Пример 2. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности числа x = 984,6, если оно имеет только верные цифры в строгом смысле.

Пример 3. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности числа x =2,364, если оно имеет только верные цифры в широком смысле.

Погрешность округленного числа.

Пример 4: Округляя число x=1,1426 до четырех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученных приближений. Цифры верны в широком смысле.

Пример5: Число x, все цифры которого верны в строгом смысле округлить до трех значащих цифр после запятой. Для полученного результата x_1 вычислить границу абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа x_1 указать количество верных цифр погрешности. x=1,1426

Вычислительная погрешность

1. Погрешность суммирования чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$

Абсолютная погрешность:

$z =(x \pm e_x)+ (y \pm e_y)=(x + y) \pm (e_x + e_y)$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{e_x + e_y}{|x+y|} = \frac{e_x}{|x+y|}\frac{|x|}{|x|} + \frac{e_y}{|x+y|}\frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x+y|}\delta_x + \frac{|y|}{|x+y|}\delta_y$$

Формат выполненной работы: защита работы.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа № 5
Теория комплексных чисел

Цель: формировать умение графического изображения комплексных чисел, выполнения арифметических операций с комплексными числами.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1:

1.Даны числа: .

$z_1 = 2+3i$

$z_2 = 1-2i$

Найдите:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $z_1 \cdot z_2$

d) $\frac{z_1}{z_2}$

e) $z_1^2 - 2z_2$

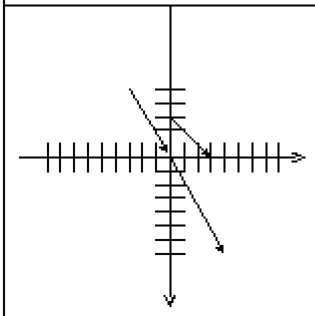
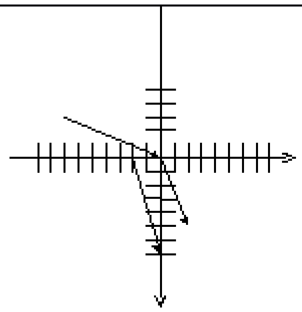
2. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

a) $z = 2i$

b) $z = -1 - i\sqrt{3}$

Задание 2:

1 вариант	2 вариант
№ 1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа:	
$z_1 = 4i$	$z_1 = -5i$
$z_2 = 3 + i$	$z_2 = 4 + i$
$z_3 = -4 + 3i$	$z_3 = -7 + 2i$
$z_4 = -2 - 5i$	$z_4 = -3 - 6i$
№ 2. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:	
А) $(3 + 5i) + (7 - 2i)$. б) $(6 + 2i) + (5 + 3i)$. в) $(-2 + 3i) - (7 - 2i)$. г) $(5 - 4i) - (6 + 2i)$.	$(3 - 2i) + (5 + i)$. $(4 + 2i) + (-3 + 2i)$. $(-5 + 2i) - (5 + 2i)$. $(-3 - 5i) - (7 - 2i)$.
№ 3. Произведите умножение комплексных чисел:	
а) $(2 + 3i)(5 - 7i)$. б) $(6 + 4i)(5 + 2i)$. в) 11) $(3 - 2i)(7 - i)$. г) $(-2 + 3i)(3 + 5i)$.	$(1 - i)(1 + i)$. $(3 + 2i)(1 + i)$. $(6 + 4i)3i$. $(2 - 3i)(-5i)$.
№ 4. Выполните действия:	
а) $(3 + 2i)(3 - 2i)$. б) $(5 + i)(5 - i)$. в) $(1 - 3i)(1 + 3i)$.	а) $(7 - 6i)(7 + 6i)$. б) $(4 + i)(4 - i)$. в) $(1 - 5i)(1 + 5i)$.
№ 5. Решите уравнения:	
а) $x^2 - 4x + 13 = 0$. б) $x^2 + 3x + 4 = 0$	а) $2{,}5x^2 + x + 1 = 0$. б) $4x^2 - 20x + 26 = 0$.
№6. На рисунке показано графическое изображение комплексных чисел. Перерисуйте рисунок в тетрадь. Обозначьте комплексные числа	

как z_1, z_2, z_3. Запишите соответствующие аналитические формы.	
	

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа № 6

Развитие понятия о числе

Цель:

- углубление и расширение знаний по данной теме и необходимости его изучения для будущей специальности;
- формирование умений использовать специальную и дополнительную литературу;
- развитие познавательных способностей, ответственности.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1:

1. Запишите число в стандартном виде:

а)730000000; в)$0,24 * 10^{-3}$;

б)0,0000025; г)$75,2*10^{4}$.

2. Найдите сопряжённое число комплексному числу: $z = 4 + 5i$.

3. Обратите чистые периодические десятичные дроби в обыкновенные:

а) 0,(42); б) 0,(513).

4. Обратите смешанные периодические десятичные дроби в обыкновенные дроби:

а) 0,0(27); б) 0,0(01).

5. . Даны числа $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Вычислите:

а) модули чисел z_1 и z_2; в) разность чисел z_1 и z_2;

б) сумму чисел z_1 и z_2; г) произведение чисел z_1 и z_2.

6. Постройте комплексные числа в координатной плоскости: $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 4 + 5i$.

Задание 2.

Вопросы:

1. Основная теорема арифметики.
2. Натуральные и целые числа, делимость чисел.
3. Рациональное число. Действие с рациональными числами.
4. Иррациональные числа. Свойства иррациональных чисел.
5. Множества действительных чисел
6. Приближенное значение величины и погрешности приближения.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа № 7

Корень n-й степени и его свойства

Цель:

- углубление и расширение знаний по данной теме и необходимости его изучения для будущей специальности;
- формирование умений использовать специальную и дополнительную литературу;
- развитие познавательных способностей, ответственности.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1.

Пример 1. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}$; в) $\sqrt[3]{64}$.

Пример 2. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$; б) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$ в) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$ г) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$ д) $\sqrt[21]{2187}$

Пример 3. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{243\,b^4}$ б) $\sqrt[5]{-128\,a^7}$

Задание 2.

Вопросы:

1. Так называют выражение xn. (степень)
2. Есть у любого слова, у растения, может быть n-й степени. (корень)

3. Степень корня, кратная 2. (четная)
4. Степень корня 2 k+1. (нечетная).
5. Как можно иначе назвать корень третьей степени? (кубический)
6. Действие, посредством которого отыскивают корень. (извлечение).
7. Положительный корень. (арифметический).
8. Как можно иначе назвать арифметический корень второй степени? (квадратный).

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа № 8
Вычисление и сравнение корней

Цель:

- формирование у учащихся целостного представления о корне *n*-ой степени, навыков сознательного и рационального использования свойств корня при решении различных задач.
- способствовать развитию алгоритмического, творческого мышления, развивать навыки самоконтроля.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1. Подготовиться к занятию

1. Найдите значение выражения: а) $\sqrt{0,64}+\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}+\sqrt[4]{81}$; б) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{64}}$

в) $\sqrt[6]{5^5\cdot3^4}\cdot\sqrt[12]{5^2\cdot3^4}$; г) $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{27}$

2. Избавиться от иррациональности в знаменателе $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$
3. Упростите выражение: а) $\frac{42\sqrt[7]{\sqrt[18]{a}}-7\sqrt[3]{\sqrt[42]{a}}}{18\sqrt[6]{\sqrt[21]{a}}}$; б) $\sqrt[3]{4\sqrt{4m^6}}$; в) $\sqrt[3]{16a^2b^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^4b^9}$
4. Найти область допустимых значений выражения а) $\sqrt[6]{x^2-3x}$; б) $\sqrt[5]{x^2-4x}$
5. Расположите в порядке возрастания $\sqrt[5]{3\sqrt{4}}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}$
6. Вынести множитель за знак корня: а) $\sqrt[3]{375}$, б) $\sqrt[6]{x^8\cdot y^7}$, если x<0.
7. Решить уравнение: а) x^3 =-216; б) $\sqrt[4]{x}=\frac{1}{3}$

Вопросы для рассмотрения:

1. Дайте определение корня n-ой степени из действительного числа.
2. Сколько корней может иметь уравнение вида $x^n = a$? Отчего это зависит?

3. Как вычислить корень n-ой степени из числа?
4. Когда корень n-ой степени не имеет смысла?

Формат выполненной работы: выступление на занятии.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа № 9
Понятие степени с действительным показателем

Цель:

– отработать навыки вычисления и упрощения выражений с помощью применения свойств степеней и корней;

– самостоятельно познакомиться с понятием степени с действительным показателем.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1.

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Пользуясь калькулятором, вычислите значение выражений: $\frac{x^3+1}{x-3}$ 2. Найдите десятичные приближения с точностью до 0,01 с недостатком и с избытком для чисел: 1) 0,37893; 2) -4,5678; 3) $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{7}$. 3. Найдите погрешность и абсолютную погрешность приближённого значения a величины x, если 1) $x=\frac{5}{3}$; $a=1.6$ 2) $x=\frac{3}{11}$; $a=0.273$ 4. Граница абсолютной погрешности приближённого значения a числа x равна h. Найдите границы, в которых заключено число x, если 1) a=23; h=0.5 2) a=-2.32; h=0.1 5. Найдите сумму $x+y$, если	1. Пользуясь калькулятором, вычислите значение выражений: $\frac{x^4+1}{x^2+2x}$ 2. Найдите десятичные приближения с точностью до 0,01 с недостатком и с избытком для чисел: 1) 1,4978; 2)-3,7326; 3)-$\sqrt{5}$; 4)$\sqrt{9}$; 3. Найдите погрешность и абсолютную погрешность приближённого значения a величины x, если 1) $x=-\frac{5}{3}$; $a=-1.66$ 2) $x=\frac{3}{11}$; $a=0.2727$ 4. Граница абсолютной погрешности приближённого значения a числа x равна h. Найдите границы, в которых заключено число x, если 1) a=2.5; h=0.01 2) a=4.55; h=0.05

1) $x = 7.8 \pm 0.05 \quad y = 3.4 \pm 0.05$ 2) $x = 1.25 \pm 0.05 \quad y = 1.02 \pm 0.02$ 6. Для примеров задания 5 найти разность $x - y$	5. Найдите сумму $x + y$, если 1) $x = -2.6 \pm 0.01 \quad y = 1.5 \pm 0.02$ 2) $x = 7.1 \pm 0.18 \quad y = 6.2 \pm 0.02$ 6. Для примеров задания 5 найти разность $x - y$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа № 10
Корни и степени

Цель:

– отработать навыки вычисления и упрощения выражений с помощью применения свойств степеней и корней;

– самостоятельно познакомиться с понятием степени с действительным показателем.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1.

Карточка №1 **1.** $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$ **2.** $\sqrt{x^2+x+7} + \sqrt{x^2+x+2} = \sqrt{3x^2+3x+9}$ **3.** $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} \le 3$ **4.** $\frac{24}{x} - \frac{17-x}{x-1} = 1$	**Карточка №2** 1. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+2} = 4$ 2. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1$ 3. $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} > 3$ **4.** $\frac{4}{x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{12}{2x^2-18}$
Карточка №3 1. $\sqrt{4x-1} - \sqrt{x-2} = 3$	**Карточка №4** 1. $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5$

2. $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$ 3. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$ 4. $\frac{x}{x-1}=\frac{4x}{x+5}-3$	2. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$ 3. $\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}$ 4. $\frac{x+3}{x+2}+\frac{3}{x-1}=\frac{3}{(x+2)(x-1)}$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа № 11
Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество

Цель: используя справочную и учебную литературу и интернет-источники получить информацию о том, в каких науках применяется понятие логарифма и оформить полученные результаты в форме презентации, отработать навыки вычисления значений логарифмических выражений с помощью калькулятора и с помощью свойств.

Самостоятельная работа обучающихся: используя справочную и учебную литературу и интернет-источники получить информацию о том, в каких науках применяется понятие логарифма и оформить полученные результаты в форме презентации, отработать навыки вычисления значений логарифмических выражений с помощью калькулятора и с помощью свойств.

Задание 1. Подготовиться к занятию

Вариант 1	Вариант 2
1. Вычислите с помощь микрокалькулятора.	
Lg30, ln 25	Lg123, ln 6
2. Вычислить значения выражения с точностью 0,001, перейдя к десятичному или натуральному логарифму. (при решении использовать и записать формулу перехода)	
$\mathrm{Log}_5 3$, $\mathrm{Log}_5 \frac{1}{3}$	$\mathrm{Log}_2 7$, $\log_3 7$
3. С помощью микрокалькулятора вычислить значение выражения с точностью до 0,01	

1) $4\log_{\frac{1}{2}}3-\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}27-2\log_{\frac{1}{2}}6$ 2) №386	1) $\frac{2}{3}\lg 0.001+\lg\sqrt[3]{1000}-\frac{3}{5}\lg\sqrt{10000}$ 2) №387

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа № 12

Преобразование и вычисление значений логарифмических выражений

Цель: используя справочную и учебную литературу и интернет-источники получить информацию о том, в каких науках применяется понятие логарифма и оформить полученные результаты в форме презентации, отработать навыки вычисления значений логарифмических выражений с помощью калькулятора и с помощью свойств.

Самостоятельная работа обучающихся: используя справочную и учебную литературу и интернет-источники получить информацию о том, в каких науках применяется понятие логарифма и оформить полученные результаты в форме презентации, отработать навыки вычисления значений логарифмических выражений с помощью калькулятора и с помощью свойств.

Задание 1. Подготовиться к занятию

1. Вычислите:

1) $\log_{12}3+\log_{12}4$; 2) $\log_2 48-\log_2 3$; 3) $\log_3 9^{10}$;

4) $\log_{15}\sqrt[3]{225}$; 5) $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$; 6) $\lg 4+2\lg 5$.

2. Выразите данный логарифм через натуральный и вычислите на микрокалькуляторе с точностью до 0,01

1) $\log_7 16$; 2) $\log_{0,2}13$.

3. Выразите $\log_{16}3$ через логарифм по основанию 2.

4. Найти значение выражения:

1) $\log_3 3{,}6-\log_3 1{,}4+\log_3 1\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{3}\log_{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{8}-3\log_{\frac{2}{3}}3+\frac{1}{2}\log_{\frac{2}{3}}36$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа № 13-14

Логарифм произведения, частного, степени; переход к новому основанию

Цель: используя справочную и учебную литературу и интернет-источники получить информацию о том, в каких науках применяется понятие логарифма и оформить полученные результаты в форме презентации, отработать навыки вычисления значений логарифмических выражений с помощью калькулятора и с помощью свойств.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, расчётная работа «Вычисление значений логарифмических выражений с помощью калькулятора»

Задание 1.

1) Вычислить: а) $\log_{0,3}\frac{1}{0,09}$; б) $\log_6 8-\log_6 2+\log_6 9$; в) $\frac{\lg 128}{\lg 4}$;

г) $2^{\log_3 5}-5^{\log_3 2}$; д) $(\log_5 36+\log_5 2-\log_5 8)\log_9\frac{1}{25}$;

е) $\log_6 5\log_5 8-\log_6 48$. ж) $\frac{\log_5 12-\log_5 4}{\log_5 18+\log_5 0,5}-\frac{\lg 64+\lg 0,5}{\lg 7-\lg 14}$

з) $\frac{\log_7 21}{\log_{21} 7}-\frac{\log_7 147}{\log_3 7}$. и) $5\log_3 49\cdot\log_7 81+17^{\log_{17}8}$.

к) $(3\log_{27}3,5-\log_3 10,5-1)\cdot 5^{3\log_5 2}$.

2) Найти $\log_6\frac{36}{a}$, $\log_6 a=-6$.

3) Найти значение выражения $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} e^5$, если $\ln\sqrt{a}=1,\ \ln b=6$.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа № 15

Десятичный и натуральный логарифмы, число е

Цель: повторить, обобщить и закрепить знания, полученные ранее, отработать навыки вычисления десятичных и натуральных логарифмов

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1.

$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$

$\log_5 20 - \log_5 4 = \log_5 5 = 1$

$10^{\lg b} = b$, $(b > 0)$.

$10^{\ln b} = b$, $(b > 0)$.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №16

Логарифмы

Цель: повторить, обобщить и закрепить знания, полученные ранее, отработать навыки вычисления десятичных и натуральных логарифмов

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Подготовка ответов на вопросы:

1. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество.
2. Докажите формулы для логарифма произведения и логарифма частного.
3. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество.
4. Докажите формулу переворачивания логарифма logab=1/logba и формулы перехода к новому основанию.
5. Логарифмическая функция ее свойства и график.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;

- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №17-19

Тождественные преобразования алгебраических выражений

Цель: систематизация, обобщение знаний, раскрытие узловых вопросов, закрепление основных знаний, развитие познавательного интереса.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1.

Выполните задания:

1. Упростите выражение

а) $(x+6y)^2-(6y+5x)(6y-5x)+x(12y-6x)$; б) $8(5y+3)^2+9(3y-1)^2$;

в) $(a+8)^2-2\cdot(a+8)(a-2)+(a-2)^2$.

г) $(x-3y)(x+3y)+(2x-3y)^2-4x(y-x)$;

д) $(4y^2+3)^2+(9-4y^2)^2-2(4y^2+3)(4y^2-9)$;

е) $(a-7)^2-2\cdot(a-7)(a-9)+(a-9)^2$.

2. Разложить многочлен на множители:

а) $8a^3-b^3+4a^2+2ab+b^2$; б) $-12x^3+12x^2-3x$.

в) $8a^3-b^3+4a^2-4ab+b^2$; г) $5x^3-5a^2x$.

3.Упростите выражение: $\dfrac{a^2+ax+x^2}{x-1} : \dfrac{a^3-x^3}{x^2-1}$

4. Найти значение выражения $\dfrac{x^4+6x^2+9-y^4}{(x-y)^2+3+2xy}$ при x=31, y=21.

5. Упростите выражение: $\dfrac{4m^2-25n^2}{m^3+8} : \dfrac{2m+5n}{m^2-2m+4}$ и вычислите его значение при m =-3 и n=7.

Найти значение выражения $\dfrac{x^4+6x^2+9-y^4}{(x-y)^2+3+2xy}$ при x=31, y=21.

5. Докажите тождество

$\dfrac{(x-3)(x-7)}{12} - \dfrac{(x-7)(x-1)}{8} + \dfrac{(x-1)(x-3)}{24} = 1$

6. Зная, что $\dfrac{x}{y} = 10$, найдите значение дроби: а) $\dfrac{x+y}{x}$; б) $\dfrac{2x-3y}{y}$; в) $\dfrac{(x-y)^2}{xy}$;

7. При каком значении переменной b выражение 3 + $\frac{b}{a+5}$ тождественно равно дроби $\frac{3a}{a+5}$?

Вопросы для самоконтроля.

1.Формулы сокращённого умножения.

2.Правила действий со степенями.

3.Формулы корней сокращённого умножения.

4.Свойства числовых неравенств.

5.Понятие модуля.

6.Свойства пропорции.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки: уровень освоения обучающимся учебного материала; умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №20-21

Градусная и радианная мера угла

Цель: формировать знание определения угла в один радиан; ввести в речевую практику понятие угла в один радиан; отработать формулы, устанавливающие связь между радианным и градусным измерением углов при выполнении упражнений.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1.

Подготовка сообщения «История тригонометрии»

Задание 1.

Вариант 1.

1. Выразите в радианной мере величины углов 75° ,168°, 64° ,160°, 72° , 140°, 42° , 130°, 66° ,156°, 48° , 188°.
2. Выразите в градусной мере величины углов 5π/18 ,17п/36, 3п/5 ,19п/40, 11п/12 , 23п/8, 7п/12 , 21п/4, 5п/18 , 9 $^{2}/_{3}$ п, 3п/16 , 2 $^{4}/_{9}$ п.

Вариант 2.

1. Найти радианную меру угла, выраженную в градусах:

а) 40°; б) 120°; в) 150°; г) 32° .

2 . Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{9}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) 3.

3. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки (1;0) на заданный угол:

а) 4π; б) - 225°; в) - $\frac{\pi}{3}$; г) - $\frac{5\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; е) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$.

4. Найти координаты точки, полученной поворотом точки Р(1;0) на угол:

а) 3π; б) - $\frac{15\pi}{2}$; в) 540°; г) 810°; д) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, k – целое число; Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки Р(1;0) на угол:

а) 1; б) 2,75; в) 3,16; г) 4,95.

6. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки Р(1;0) на угол:

а) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; б) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$; в) $4{,}5\pi$; г) - 7π.

7. Найти координаты точки, полученной поворотом точки Р (1;0) на угол (k – целое число):

а) $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$; б) $-\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$; в) $-\frac{7\pi}{2} + 2\pi k$; г) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

8. В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки Р(1;0) на угол *α,* если:

а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; б) α = - $\frac{3\pi}{4}$; в) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$;

г) α = 4,8; д) α = - 1,31; е) α = - 2,7.

.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки: уровень освоения обучающимся учебного материала; умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №22-25

Тригонометрические функции числового аргумента

Цель: обеспечить повторение, обобщение и систематизацию материала темы "Тригонометрические функции числового аргумента", создать условия контроля (самоконтроля) усвоения знаний и умений.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1.

1. Постройте графики функций: $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tgx$; $y = ctgx$;
2. Запишите свойства каждой из функций по плану:

1) ООФ:
2) МЗ:
3) Четность:
4) Периодичность:
5) Непрерывность:
6) Функция возрастает
7) Функция убывает
8) Функция принимает положительные значения

9) Функция принимает отрицательные значения
10) Наибольшее значение функции равно ___ при ___
11) Наименьшее значение функции равно ___ при ___
12) Значение, равное нулю, функция принимает при ___

3. Сравните: а) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $\sin\frac{3\pi}{11}$; б) $\sin\frac{7\pi}{12}$ и $\sin\frac{11\pi}{12}$; в) $\sin\frac{11\pi}{12}$ и $\sin\frac{13\pi}{12}$; г) $\sin\frac{\pi}{12}$ и $\sin\frac{\pi}{14}$;

д) $\cos\frac{\pi}{12}$ и $\cos\frac{\pi}{14}$; е) $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$; ж) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$; з) $\cos\frac{\pi}{12}$ и $\cos\frac{11\pi}{12}$;

и) $tg\frac{\pi}{7}$ и $tg\frac{13\pi}{12}$; к) $tg\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $tg\frac{3\pi}{11}$; л) $ctg\frac{\pi}{7}$ и $ctg\frac{11\pi}{12}$; м) $ctg\frac{\pi}{5}$ и $ctg\frac{13\pi}{12}$.

4. Найдите множество значений функции: а) $y=\sin 3x$; б) $y=\sin x-8$; в) $y=\sin x+4$;

г) $y=6\sin x$; д) $y=\sin(8x+2)$; е) $y=\sin(9x-1)$; ж) $y=5\cos x$; з) $y=\cos 5x$; и) $y=\cos(7x-3)$;

к) $y=\cos(4x+8)$; л) $y=\cos x+8$; м) $y=4\sin x-2$; н) $y=3\cos x+5$; о) $y=2\cos x-7$;

п) $y=7tgx$; р) $y=tg7x$; с) $y=4ctgx$; т) $y=ctg6x$.

5. Постройте графики функций: а) $y=4\sin x$; б) $y=|\sin 3x|$; в) $y=\sin|2x|$; г) $y=4\cos x$;

д) $y=|\cos 4x|$; е) $y=\cos|4x|$; ж) $y=tgx+1$; з) $y=ctgx-1$; и) $y=-\sin x$; к) $y=-\cos x$;

л) $y=-tgx$; м) $y=-ctgx$.

Задание 2.

Вариант №1

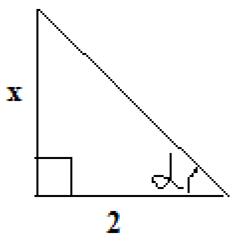
1.По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций: sin t=4/5, π/2 <t<π.

2.Упростите выражение
$\cos^2 t - (ctg^2 t + 1) * \sin^2 t$.

3. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: 75° ; 10° ; 144° ; 1080° .

4. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{5}; \frac{5\pi}{18}; \frac{11\pi}{2}$.

5.Найдите сторону x прямоугольного треугольника



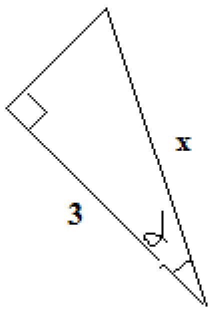
1. По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций: cos t=-0,6, $-\pi/2 < t < 0$.

2. Упростите выражение $ctg^2 t - (\sin^2 t - 1)$.

3. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $15°$; $18°$; $108°$; $720°$.

4. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{18}; \frac{7\pi}{10}; \frac{13\pi}{4}$.

5.Найдите сторону х прямоугольного треугольника



Вариант №3

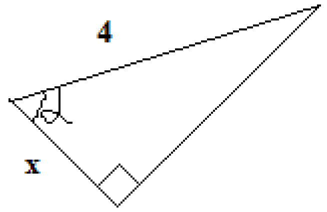
1.По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций: tg t=-5/12, $3\pi/2 < t < 2\pi$.

2. Упростите выражение
$(\sin^2 t - 1)/(\cos^2 t - 1) + tg\ t * ctg\ t$.

3. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $20°$; $36°$; $250°$; $900°$.

4. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{10}; \frac{8\pi}{15}; \frac{5\pi}{12}$.

5.Найдите сторону х прямоугольного треугольника



Вариант №4

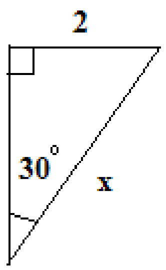
1. По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций: ctg t=7/24, $0 < t < \pi/2$.

2. Упростите выражение
$\sin t / (1 + \cos t) + \sin t / (1 - \cos t)$.

3. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $40°$; $72°$; $320°$; $1200°$.

4. Переведите данные числа из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{15}; \frac{3\pi}{5}; \frac{7\pi}{18}$.

5.Найдите сторону х прямоугольного треугольника



Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки: уровень освоения обучающимся учебного материала; умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №26-27

Основные тригонометрические тождества

Цель: знать основные тригонометрические тождества, уметь применять их, формирование понятия тождества, умения доказывать тождества и упрощать тригонометрические выражения с использованием изученных формул.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1.

1. Упростите выражение:
   а) $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
   б) $\cos^2 \beta - 1 = -\sin^2 \beta$
   в) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + 4 = 5$
   г) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$
   д) $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$
   е) $\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$
2. Выразите через $sin^2\alpha$:
   а) $(1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha = 2\sin^2 \alpha$
   б) $3 + 3ctg^2\alpha = \dfrac{3}{\sin^2\alpha}$

3) Выразите через tg α:
   а) $\dfrac{1}{ctg\alpha} = tg\alpha$
   б) $\dfrac{tg\alpha}{ctg\alpha} = tg^2\alpha$

Задание 2.

Доказать, что при $\alpha \neq \pi n$, $n \in Z$, справедливо равенство

1. $\sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

2. $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3. $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+tg\alpha\cdot ctg\alpha=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$

Задание 3.

Вариант 1

1.Упростите выражение:

tg α cos α

а) sin α б)ctg α в)cos α г)tg α

2.Вычислите:

$2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$

а)0 б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ в)1 г) $\frac{1}{2}$

3.Решите уравнение:

sinx=1

а) $x=\pi k, k\in Z$

б) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

в) $x=2\pi k, k\in Z$

г) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

4.Упростите выражение:

$\frac{1+\cos 2\alpha}{\cos\alpha}-\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$

а)sin α б)cos α

в)sin α -cos α г) cos α -sin α

5.Запишите решение.

Вычислите:

$$\frac{2\sin 31^\circ\cos 31^\circ}{\cos 38^\circ\sin 24^\circ+\sin 66^\circ\sin 38^\circ}$$

Вариант 2

1.Упростите выражение:

ctg α sin α

а) sin α б)ctg α в)cos α г)tg α

2.Вычислите:

$\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}$

а)0 б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ в)1 г) $\frac{1}{2}$

3.Решите уравнение:

cosx=1

а) $x=\pi k, k\in Z$

б) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

в) $x=2\pi k, k\in Z$

г) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.

4.Упростите выражение:

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}-\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

а)sin α б)cos α

в)sin α -cos α г) cos α -sin α

5.Запишите решение.

Вычислите:

$$\frac{\cos 27^\circ\cos 29^\circ-\sin 27^\circ\cos 61^\circ}{2\sin 17^\circ\cos 17^\circ}$$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №28

Синус, косинус двойного угла

Цель: изучение и применение формул синуса, косинуса и тангенса двойного угла

Самостоятельная работа обучающихся работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Вариант 1	Вариант 2
1) Найдите $24cos2\alpha$, если $sin\alpha = -0{,}2$ 2) Найдите значение выражения $\frac{12sin11°cos11°}{sin22°}$ 3) Найдите значение выражения $\frac{24(sin^2 17°-cos^2 17°)}{cos34°}$ 4) Найдите $\frac{10sin6\alpha}{3cos3\alpha}$, если $sin3\alpha = 0{,}6$ 5) Найдите значение выражения $8sin\frac{5\pi}{12}cos\frac{5\pi}{12}$ 6) Упростите выражение $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ 7) Упростите выражение $\frac{\cos 2t-\cos^2 t}{1-\cos^2 t}$ 8) Решите уравнение $sin^2\frac{x}{4}-cos^2\frac{x}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1) Найдите $-7cos2\alpha$, если $sin\alpha = 0{,}5$ 2) Найдите значение выражения $\frac{36sin102°cos102°}{sin204°}$ 3) Найдите значение выражения $\frac{22(sin^2 72°-cos^2 72°)}{cos144°}$ 4) Найдите $\frac{3sin4\alpha}{5cos2\alpha}$, если $sin2\alpha = -0{,}2$ 5) Найдите значение выражения $2\sqrt{2}sin\frac{11\pi}{8}cos\frac{11\pi}{8}$ 6) Упростите выражение $\frac{\sin 2t-2\sin t}{\cos t-1}$ 7) Упростите выражение $\frac{2\cos^2\alpha\,\text{tg}\,\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ 8) Решите уравнение $sin3xcos3x=-\frac{\sqrt{3}}{4}$
Вариант 3	**Вариант 4**
1) Найдите $7cos2\alpha$, если $sin\alpha = -0{,}2$ 2) Найдите значение выражения $\frac{32sin7°cos7°}{sin14°}$ 3) Найдите значение выражения $\frac{28(sin^2 78°-cos^2 78°)}{cos156°}$ 4) Найдите $\frac{2sin6\alpha}{5cos3\alpha}$, если $sin3\alpha = 0{,}8$ 5) Найдите значение выражения $sin\frac{23\pi}{12}cos\frac{23\pi}{12}$ 6) Упростите выражение tg α (1 + cos 2α) 7) Упростите выражение $\frac{1+\sin 2x}{(\sin x+\cos x)^2}$ 8) Решите уравнение $sin^2\frac{x}{6}-cos^2\frac{x}{6}=\frac{1}{2}$	1) Найдите $13cos2\alpha$, если $sin\alpha = 0{,}4$ 2) Найдите значение выражения $\frac{18sin174°cos174°}{sin348°}$ 3) Найдите значение выражения $\frac{25(sin^2 77°-cos^2 77°)}{cos154°}$ 4) Найдите $\frac{5sin4\alpha}{3cos2\alpha}$, если $sin2\alpha = 0{,}9$ 5) Найдите значение выражения $5\ sin\frac{7\pi}{12}cos\frac{7\pi}{12}$ 6) Упростите выражение $\frac{\sin^2\alpha\,\text{ctg}\,\alpha}{\sin 2\alpha}$ 7) Упростите выражение ctg β(1 – cos 2β) 8) Решите уравнение $sin3xcos3x=\frac{1}{4}$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №29

Преобразование тригонометрических выражений с использованием тригонометрических тождеств

Цель: Систематизировать и обобщить знания по теме «Преобразование тригонометрических выражений», осуществить проверку знаний по наиболее важным разделам пройденной темы, корректировка знаний.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1 вариант

1) Упростите выражение:

$4\sin^2 2x - 9 + 4\cos^2 2x$

1) -1; 2)-5; 3) 5; 4) 13

2) Найдите tgß, если sinß = $1/\sqrt{10}$ и

$\pi < ß < 3\pi/2$

1) -1/3; 2) 3/10; 3) 1/3; 4) $-3/\sqrt{10}$

3) Найдите значение выражения:

$7\cos(\pi + \alpha) - \sin(3\pi/2 + \alpha)$, если $\cos\alpha = 0{,}6$

1) $4\cos\alpha$; 2) 3,6; 3) -3,6; 4) $\sin\alpha$

4) Упростите выражение:

$(1 + \cos 2\alpha) : (1 - \cos 2\alpha)$

1) $tg^2\alpha$; 2) $1/\sin 2\alpha$; 3) $ctg 2\alpha$; 4) $ctg^2\alpha$

5) Вычислите: $\sin(-19\pi/6) + \sin\pi/8 \cdot \cos\pi/8$

1) $\sqrt{2}/2$; 2) 1; 3) $(-2 + \sqrt{2})/4$; 4) $(2 + \sqrt{2})/4$

2 вариант

1) Найдите значение выражения:

$5\sin^2 3x - 6$, если $\cos^2 3x = 0{,}6$

1) 2,8; 2) -3; 3) 8; 4) -4

2) Найдите tgα, если $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$ и

$0 < \alpha < \pi/2$

1) $1/\sqrt{5}$; 2) 2; 3) ½; 4) $\sqrt{5}$

3) Упростите выражение:

$\sin(3\pi/2 - \alpha)\cdot \cos(\pi/2 + \alpha) + \sin(2\pi - \alpha) +$

$+ \cos(3\pi/2 + \alpha) + \cos\alpha \cdot \sin\alpha$

1) $-2\sin\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$; 3) 0; 4) $2\cos\alpha$

4) Найдите значение выражения:

$(tg\alpha + ctg\alpha)^2 - 2$ при $\alpha = -\pi/4$

1) -2; 2) 2; 3) -1; 4) 0

5) Вычислите: $(\sin 75^\circ + \sin 45^\circ) : \sin 285^\circ$

1) $-\sqrt{3}$; 2) $-\sqrt{3}/2$; 3) 3; 4) $\sqrt{3}$

3 вариант

1) Найдите значение выражения:

$4 + 5tg^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0{,}4$

1) 4,8; 2) 6; 3) 4,4; 4) 9,2

2) Найдите cos2ß, если ctgß = -4/3 и

ß $\in (3\pi/2; 2\pi)$

1) 0,28; 2) 0,96; 3) – 0,28; 4) – 0,96

3) Найдите значение выражения:

$5\cos(3\pi/2 + \alpha)$, если $\alpha = 7\pi/6$

$4\sin(2\pi - \alpha)$

1) 1,25; 2) 0,25; 3) 0,8; 4) -1,25

4) Упростите выражение:

$ctg^2x \cdot sin^2x - cos2x$

1) $-sin^2x$; 2) sin^2x; 3) cos^2x; 4) 0

5) Вычислите:

$3ctg60^o \cdot (sin310^o cos70^o - sin70^o cos310^o)$

1) 1,5; 2) $\sqrt{3}$; 3) 0,5; 4) -1,5

4 вариант

1) Найдите значение выражения:

$2sin^2 2x - 9cos^2 2x$, если $cos2x = - 0,9$

1) – 6,91; 2) 11,91; 3) 11,9; 4) – 7,9

2) Найдите cosß, если tgß = 7/24 и ß $\epsilon(\pi; 3\pi/2)$

1) 0,48; 2) 0,96; 3) – 0,48; 4) – 0,96

3) Найдите значение выражения:

$\sqrt{10} ctg\alpha \cdot sin(\alpha + \pi)$, если $cos\alpha = \sqrt{10}/4$

1) 2,5; 2) 5,5; 3) -2,5; 4) 50

4) Упростите выражение:

$(1 - cos^2ß)\, tg^2ß + 1 - tg^2ß$

1) $2 - tg^2ß$; 2) $cos^2 ß$; 3) $2tg^2ß + 1$; 4) $-cos^2 ß$

5) Вычислите:

$(cos105^o - cos15^o) : cos315^o$

1) 0,5; 2) 1,5; 3) $\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{3}$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №30-31

Решение тригонометрических уравнений

Цель:

– обобщение и систематизация знаний и способов действий;

– проверка, оценка и коррекция знаний и способов действий;

– обучение самоконтролю, быстрому переключению с одного типа заданий на другой;

– повторить основные теоретические сведения по тригонометрии;

– повторить формулы тригонометрии, методы преобразования выражений.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Вариант 1	Вариант 2
1) Найдите $24cos2\alpha$, если $sin\alpha = -0,2$ 2) Найдите значение выражения $\frac{12sin11^\circ cos11^\circ}{sin22^\circ}$ 3) Найдите значение выражения $\frac{24(sin^2 17^\circ - cos^2 17^\circ)}{cos34^\circ}$	1) Найдите $-7cos2\alpha$, если $sin\alpha = 0,5$ 2) Найдите значение выражения $\frac{36sin102^\circ cos102^\circ}{sin204^\circ}$ 3) Найдите значение выражения $\frac{22(sin^2 72^\circ - cos^2 72^\circ)}{cos144^\circ}$

4) Найдите $\frac{10sin6\alpha}{3cos3\alpha}$, если $sin3\alpha = 0,6$ 5) Найдите значение выражения $8sin\frac{5\pi}{12}cos\frac{5\pi}{12}$ 6) Упростите выражение $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ 7) Упростите выражение $\frac{\cos 2t - \cos^2 t}{1-\cos^2 t}$ 8) Решите уравнение $sin^2\frac{x}{4} - cos^2\frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	4) Найдите $\frac{3sin4\alpha}{5cos2\alpha}$, если $sin2\alpha = -0,2$ 5) Найдите значение выражения $2\sqrt{2}sin\frac{11\pi}{8}cos\frac{11\pi}{8}$ 6) Упростите выражение $\frac{\sin 2t - 2\sin t}{\cos t - 1}$ 7) Упростите выражение $\frac{2\cos^2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ 8) Решите уравнение $sin3xcos3x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$
Вариант 3	Вариант 4
1) Найдите $7cos2\alpha$, если $sin\alpha = -0,2$ 2) Найдите значение выражения $\frac{32sin7°cos7°}{sin14°}$ 3) Найдите значение выражения $\frac{28(sin^2 78° - cos^2 78°)}{cos156°}$ 4) Найдите $\frac{2sin6\alpha}{5cos3\alpha}$, если $sin3\alpha = 0,8$ 5) Найдите значение выражения $sin\frac{23\pi}{12}cos\frac{23\pi}{12}$ 6) Упростите выражение tg α (1 + cos 2α) 7) Упростите выражение $\frac{1+\sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$ 8) Решите уравнение $sin^2\frac{x}{6} - cos^2\frac{x}{6} = \frac{1}{2}$	1) Найдите $13cos2\alpha$, если $sin\alpha = 0,4$ 2) Найдите значение выражения $\frac{18sin174°cos174°}{sin348°}$ 3) Найдите значение выражения $\frac{25(sin^2 77° - cos^2 77°)}{cos154°}$ 4) Найдите $\frac{5sin4\alpha}{3cos2\alpha}$, если $sin2\alpha = 0,9$ 5) Найдите значение выражения $5\ sin\frac{7\pi}{12}cos\frac{7\pi}{12}$ 6) Упростите выражение $\frac{\sin^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$ 7) Упростите выражение ctg β(1 – cos 2β) 8) Решите уравнение $sin3xcos3x = \frac{1}{4}$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №32-33

Решение тригонометрических неравенств

Цель:

– закрепление знаний тригонометрических формул, табличных значений тригонометрических функций, формул корней тригонометрических уравнений;

– формирование навыка решения простейших тригонометрических неравенств;

– освоение приёмов решения более сложных тригонометрических неравенств;

– развитие логического мышления, смысловой памяти, навыков самостоятельной работы, самопроверки;

– воспитание аккуратности и чёткости в оформлении решения, интереса к предмету, уважения к одноклассникам.

– формирование учебно-познавательных, информационных, коммуникативных компетенций.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Решите неравенство:

1. $\sin 3x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\text{tg } x \geq -1$
3. $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$
5. $\sin x \leq -\frac{1}{2}$
6. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\text{tg } x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №34

Тригонометрические уравнения и неравенства

Цель:

– закрепление знаний тригонометрических формул, табличных значений тригонометрических функций, формул корней тригонометрических уравнений;

– формирование навыка решения простейших тригонометрических неравенств;

– освоение приёмов решения более сложных тригонометрических неравенств;

– развитие логического мышления, смысловой памяти, навыков самостоятельной работы, самопроверки;

– воспитание аккуратности и чёткости в оформлении решения, интереса к предмету, уважения к одноклассникам.

– формирование учебно-познавательных, информационных, коммуникативных компетенций.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Решите уравнения:	Решите неравенства:
Вариант 1. 1. $\sin x = 0{,}5\sqrt{2}$ 2. $\cos 4x = 0$ 3. $\cos 3x = 3$ 4. $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$	Вариант 1. 1. $\text{tg}\, x \geq -1$ 2. $1 - 2\cos\frac{x}{2} > 0$ 3. $2\sin x \geq 1$

5. $\mathrm{tg}\frac{x}{4}+1=0$ 6. $\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 7. $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$ Вариант 2. 1. $\cos x=0{,}5\sqrt{2}$ 2. $\sin 2x=1$ 3. $\sin 2x=2$ 4. $\sin\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$ 5. $\mathrm{ctg}\frac{x}{3}-1=0$ 6. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ 7. $4\cos^2 x-8\cos x+3=0$	4. $\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5. $\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 6. $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\geq\frac{1}{4}$ 7. $\cos 3x<-2$ Вариант 2. 1. $\mathrm{tg}x\leq\sqrt{3}$ 2. $-\sqrt{3}-2\sin 3x<0$ 3. $2\cos x<\sqrt{2}$ 4. $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\geq-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5. $\cos\left(x+\frac{1}{4}\right)\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 6. $\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3}\right)>\frac{1}{3}$ 7. $\sin 2x>-\sqrt{3}$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №35

Арксинус, арккосинус, арктангенс числа

Цель:

– формировать и развивать умения решать простейшие тригонометрические уравнения, познакомить с понятием арккосинуса, арксинуса и арктангенса числа.

– продолжать формирование умения самостоятельно работать. Развивать и совершенствовать знания, умения и навыки при выполнении различных заданий по теме. Развивать логическое мышление.

– развивать умение самостоятельно выполнять задания, умение работать с учебным материалом, контролировать свою деятельность, адекватно оценивать результаты своей деятельности.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений

Задание

Вариант 1

1. Вычислите:

а) arcsin 1 б) arccos 0 в) arcsin 0,5 г) arccos (-0,5) д) arcsin ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$)

и) arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ к) arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$ л) arccos ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$) м) arcsin (-1)

2. Найдите значения выражений:

а) 4 arcsin 0 + 2 arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ б) -3 arccos (-0,5) - 5arcsin (-0,5)

в) 0,5 arcsin ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$) - 6 arccos ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$) г) -7 arccos (-1) + 0,4 arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Сравните:

а) arcsin ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$) и arccos ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$) б) arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и arccos ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Вариант 2

1. Вычислите:

а) arccos 1 б) arcsin 0 в) arccos 0,5 г) arcsin (-0,5) д) arccos ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$)

и) arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ к) arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ л) arcsin ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$) м) arccos (-1)

2. Найдите значения выражений:

а) 4 arccos 0 + 2 arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$ б) -3 arcsin (-0,5) - 5 arccos (-0,5)

в) 0,5 arccos($-\frac{\sqrt{3}}{2}$) - 6 arcsin ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$) г) -7 arcsin (-1) + 0,4 arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Сравните:

а) arccos ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$) и arcsin ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$) б) arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и arcsin ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №36

Построение графиков тригонометрических функций с помощью тригонометрических преобразований

Цель: формирование практических умений и навыков при построении и преобразовании графиков функций на основе ранее изученных функций $y=sinx$ и $y=cosx$; обеспечить максимальную наглядность изучения данной темы использования компьютерных технологий на уроках математики.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Уровень А

1. Построить график функции $y = cos\ x$ и записать его свойства.
2. Построить график функции $y = sin\ x$ и записать его свойства.
3. Построить график функции $y = tg\ x$ и записать его свойства.

Уровень Б

1. **Постройте график функции $y = \sin x - 1$;**
2. **Постройте график фукнции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;**
3. **Постройте график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$;**

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №37-38

Тригонометрические уравнения и неравенства

Цель:

– закрепление знаний тригонометрических формул, табличных значений тригонометрических функций, формул корней тригонометрических уравнений;

– формирование навыка решения простейших тригонометрических неравенств;

– освоение приёмов решения более сложных тригонометрических неравенств;

– развитие логического мышления, смысловой памяти, навыков самостоятельной работы, самопроверки;

– воспитание аккуратности и чёткости в оформлении решения, интереса к предмету, уважения к одноклассникам.

– формирование учебно-познавательных, информационных, коммуникативных компетенций.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Вариант 1.

1. Решите уравнение:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

б) $tg\alpha = \sqrt{3}$.

1. Решите уравнение:

а) $ctg\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

1. Решите уравнение:

$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha = 3$.

1. Решите неравенство:

$\sin x + 1 \le 5\sin x - 1$

1. Решите уравнение:

а) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$;

б) $tg\ (\pi + x) - 2ctg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sqrt{3} = 0$.

1. Решите уравнение:

$\frac{1}{\cos^2 x} + ctg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = tg^2 x + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$.

Вариант 2.

1. Решите уравнение:

а) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1. Решите уравнение:

а) $ctg\alpha = -\sqrt{3}$; б) $\sin 3x = -\frac{1}{2}$.

1. Решите уравнение:

$\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$.

1. Решите неравенство:

$3\cos x + 1 \geq 7\cos x - 1$

1. Решите уравнение:

а) $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$;

б) $2ctg\ (\pi - x) - tg\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$.

1. Решите уравнение:

$\cos(60^\circ + x) + \sin(30^\circ + x) - 1 - \cos 2x = 0$.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №39

Основы тригонометрии

Цель:

– закрепление знаний тригонометрических формул, табличных значений тригонометрических функций, формул корней тригонометрических уравнений;

– формирование навыка решения простейших тригонометрических неравенств;

– освоение приёмов решения более сложных тригонометрических неравенств;

– развитие логического мышления, смысловой памяти, навыков самостоятельной работы, самопроверки;

– воспитание аккуратности и чёткости в оформлении решения, интереса к предмету, уважения к одноклассникам.

– формирование учебно-познавательных, информационных, коммуникативных компетенций.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой

Задание

Повторить лекционный материал

Формат выполненной работы: просмотр лекций

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №40-41

Область определения и множество значений функции

Цель: закрепить умения и навыки решения задач по теме: «Область определения и множество значений функции.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

№ 1.Найдите значения функции:

а) $f(x) = 4x +$ в точках 2;20 ;

б) $f(x) = 2\cdot\cos(x)$ в точках ; 0;

в) $f(x) =$ в точках 1;0; 2;

г) $f(x) = 6 \sin 4x$ в точках ; 0;

е) $f(x) = 2\ 9x + 10$ в точках 2; 0; 5.

№ 2.Найдите область определения функции:

а) $f(x) =$; б) $f(x) =$; в) $f(x) =$;

г) $f(x) =$; д) $f(x) =$; е) $f(x) = 6x +1$;

ж) $f(x) =$; з) $f(x) =$.

№3. Найдите область значений функции:

а) $f(x) = 2+3x$; б) $f(x) = 2\ 7x + 3$.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №42

Построение графиков элементарных функций

Цель: повторение теоретического материала и построение графиков элементарных функций

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Задача №1. Построить графики функций:

а) $y = 3x - 1$; б) $y = -x + 2$;

в) $y = 2x$; г) $y = -1$.

Задача №2. Построить графики функций:

а) $y = x^2 - 1$; б) $y = x^2 - 8x + 15$; в) $y = -2x^2 + 4x$.

Задача №3. Построить графики функций: а) $y = \frac{x-3}{x+2}$; б) $y = \frac{2}{-x}$; в) $y = \frac{2x}{x-1}$.

Задача №4. Построить графики функций: а) $y = \sqrt{x}$, б) $y = 3^x$, в) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Задача №5. Построить графики функций:

а) $y = x^2 + 1$; б) $y = \sqrt{x - 1}$;

в) $y = (x - 1)^2 + 2$; г) $y = cos\left(\frac{x}{2}\right)$; д) $y = -|2x + 1|$.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №43-44

Промежутки возрастания, убывания, наибольшее, наименьшее значения функции

Цель: сформировать у студентов целостное представление понятия функции, научить работать со свойствами

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.

Найти интервалы возрастания/убывания и экстремумы функции

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$$

Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x) = 8x + \frac{x^4}{4}$

Найти экстремумы функции $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

Найти интервалы монотонности, максимумы и минимумы функции $f(x) = \dfrac{1-x^3}{3x}$

Найти точки экстремума функции $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №45

Арифметические операции над функциями

Цель: развитие познавательного интереса при решении математических заданий

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой

Задание

1. Что такое функция?
2. Что такое график функции?
3. Что такое область определения и множество значений функции?
4. Какие периодические фенкции Вы знаете?
5. Что такое композиция функции?
6. Как найти естественную область определения сложной функции?
7. Какие две функции называют взаимно-обратными?
8. При каком условии функция имеет обратную?

Подведение итогов:

Формат выполненной работы: повторение лекционного материала

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №46

Построение графиков

Цель: провести исследование выпуклости графика, понятие точки перегиба, алгоритм исследования функций. Уметь по исследованию строить график функции.

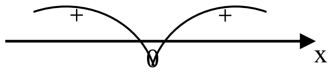
Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, графическая работа

Задание

Пример 1. Исследуем направление выпуклости графика функции x^4.

$(x^4)'' = 12x^2$

$12x^2 = 0$ $x = 0$

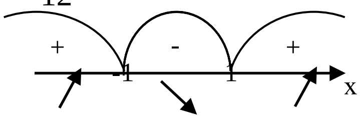


выпуклость вниз.

Пример 2. Найти участок, где график функции $x^4 – 6x^2+ 4$ обращен выпуклостью вверх.

$(x^4 – 6x^2+ 4)'' = (4x^3 - 12x)' = 12x^2 – 12$

$12(x^2 – 1) = 0$ $x = \pm 1$



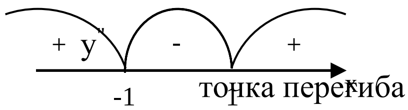
Пример.3 Найдем точку перегиба графика функции.

$y = x^4 – 6x^2 + 4$

$y' = 4x^3 – 12x$

$y'' = 12x^2 – 12$

$y'' = 0$ $x = \pm 1$



Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №47-48

Степенная функция, ее график и свойства

Цель: формировать умение строить графики степенных функций и использовать их при решении уравнений и неравенств; для подготовки к итоговой аттестации повторить свойства линейной и квадратичной функций.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1.Укажите степенную функцию: 1) $y = 3^{x}$;   2) $y = (x + 3)^2$;   3) $y = {}^{3,4}$;   4) $y = x^{6}$.

2.Функция задана формулой $y = x^n$ Найдите n, если известно, что график функции проходит через точку: 1) A (- 216; - 6);   2) B (4; 0,5).

3. Решите неравенство: $x^2\, x \le 2$.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №50

Тригонометрические функции, их свойства и графики

Цель: обобщить и систематизировать знания обучающихся по изучаемой теме, провести контроль уровня усвоения материала;

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Не выполняя построения, установите, принадлежит ли графику функции $y = -\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ точка:

а) $M\left(0; -\sqrt{3}\right)$;   б) $P\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$.

2. Исследуйте функцию на четность.

а) $y = x^2 \sin 3x$;   б) $y = |\mathrm{ctg}\, x| + \cos x$;   в) $y = \frac{x^6}{2} - \sin x$.

3. Исследуйте функцию $y = |\mathrm{ctg}\, x| + \cos x$ на периодичность; укажите основной период, если он существует.

4. Решите графически уравнение $-\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Постройте график функции, указанной в пункте а) или б).

а) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$;   б) $y = 2 \sin \frac{1}{2} x$.

6. При каком значении параметра a неравенство $a - x^2 \geq |\sin x|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №51-53

<u>Показательная функция, ее свойства и график</u>

Цель: изучить основные свойства показательной функции; формировать умения использовать свойства показательной функции для исследования функций и решения уравнений и неравенств; систематизировать знания по ранее изученным функциям

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Сравните:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}$

2) $3,7^{1,5}$ и $3,7^{\sqrt{2}}$

2. На рисунке изображен график функции, заданной формулой $y = a^x$ на множестве D. Укажите для нее:

а) значение а;

б) область определения;

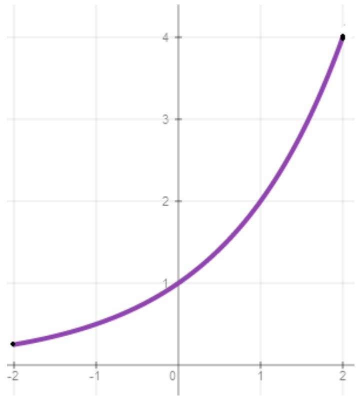
в) множество (область) значений;

г) промежутки возрастании (убывания);

д) координаты точек пересечения графика с осью Оу;

е) значение в точках x1= -1 и x2= 1;

ж) наибольшее и наименьшее значения.



3. Укажите естественную область определения выражения (a>1):

$$a^{\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}+\frac{\sqrt{x-8}}{2}}$$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №54-55

Логарифмическая функция, ее свойства и график

Цель: формирование знаний в усвоении понятия логарифмической функции, свойства логарифмической функции; применять графики при решении задач.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Постройте график функции

а) $y=\log_2 x$; б) $y=\log_2 (x-3)$; в) $y=\log_{1/2} x$; г) $y=\log_{1/2} (-x)$.

2 . Решите уравнение

а) $\log_2 x=5$; б) $\log_3 x=0,5$; в) $\log_5 x=-1$;

г) $\log_{0,5} x=2$; д) $\log_{0,3} x=-1$; е) $\log_{0,25} x=-0,5$.

3. Решите неравенство

а) $\log_2 x>1$; б) $\log_3 x>-1$; в) $\lg x<2$;

г) $\log_9 x<0$; д) $\log_2 x>0$; е) $\lg x<-2$.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №56-57

Предел последовательности

Цель: познакомить учащихся с понятием предела последовательности; вычислении пределов числовых последовательностей.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

ВАРИАНТ 1

Вычислите пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(4x-x^2+x^3\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8+x}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x-x^2}{25-x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+x^2-1}{2x+x^4-x^5}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^3+x+4}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+6}\cdot\dfrac{x^2-1}{5x+x^3}\right)$.

4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{x^2-4x+3}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$.

ВАРИАНТ 2

Вычислите пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to5}\frac{(6-x)(x+2)}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{7x-6x^2}{12}$;

3) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3+2x^2-3x}{4x^3-3x^2+2}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x^5+4}{3x^4+2x-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-3}+\frac{x}{9+x}\right)$.

8) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x}$.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №58

<u>Длина окружности и площадь круга как пределы последовательностей</u>

Цель: расширение теоретических знаний и развитие практических умений по теме «Менеджмент как вид деятельности», развитие умений проводить поиск необходимой информации в источниках различного типа и представлять результаты изучения материала в форме реферата, формирование умений применять знания в решении практических задач.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, аналитическая обработка текста, подготовка реферата. Решение ситуационной задачи, ответы на контрольные вопросы.

Задание

· $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to9}\left(\frac{1}{x-9}-\frac{18}{x^2-81}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to2}\frac{5\cdot(2-x)}{\sqrt{6-x}-2}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x^2-6x+9}{4x^3+7x^2-4x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{6x^2+x^3}{x^2+7x^4}$

Вариант I	**Вариант II**

1. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$ 2. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$ 3. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-x^5}{x^2+x^4}$	1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$ 3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-x^3+2x}{x^4-8x^3+1}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-8x+x^3}{x^2-4x}$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии

Самостоятельная работа №59-61

Решение задач на непрерывность функции

Цель: формирование навыков исследования функции на непрерывность, классификации точек разрыва

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Пример 1

Исследовать функцию $y=f(x)=\frac{x^3-x^2}{x-1}$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Выполнить чертёж.

Пример 2

Исследовать функцию $y=f(x)=x^2-\frac{|x+1|}{x+1}-1$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Выполнить чертёж.

Пример 3

Исследовать функцию $y=f(x)=\frac{x^2-x}{|x-1|}$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Сделать чертёж.

Пример 4

Исследовать функцию на непрерывность и построить график функции $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если} \quad x\le -1 \\ x^2+1, & \text{если} \quad -1<x\le 1 \\ -x+3, & \text{если} \quad x>1 \end{cases}$

Пример 5

Исследовать функцию на непрерывность и построить её график $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если} \quad x\le 0 \\ 1+2x, & \text{если} \quad 0<x<2 \\ x-2, & \text{если} \quad x\ge 2 \end{cases}$

Пример 6

Дана функция $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x+2}, & x<-2 \\ 2, & -2\le x\le 2 \\ \dfrac{1}{2x}, & x>2 \end{cases}$. Исследовать функцию на непрерывность в точках $x=-2, x=2$.

Пример 7

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x}$ и построить её схематический график.

Пример 8

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=e^{\frac{1}{1-x}}$ и выполнить схематический чертёж.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №62

Понятие о производной функции, физический и геометрический смысл производной

Цель: ввести понятие производной, познакомить с ее физическим и геометрическим смыслом, с алгоритмом нахождения производной, рассмотреть задачи, приводящие к понятию производной, закрепить умение применять физический и геометрический смысл производной на конкретных примерах.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Найдите производную функции

а) $f(x) = 7x^6 + 4x^3 - 4x + 9$

б) $f(x) = x^7 + \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + x$

в) $f(x) = 7x^6 + x^3 + 4x + 2$

г) $f(x) = 3x^9 + \frac{1}{8}x^8 + x^3 - x$

2. Найдите значение производной функции

$y = \frac{x^2}{x-1}$ в точке $x_0 = 3$.

$y = \frac{x^2}{x-4}$ в точке $x_0 = 2$.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №63-64

Уравнение касательной к графику функции

Цель: ввести понятие касательной к графику функции в точке, выяснить в чем состоит геометрический смысл производной, вывести уравнение касательной и научить находить его для конкретных функций.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание 1.

1 вариант

1. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции в точке x_0:

А) $f(x)=2x^3+8x^2+x$, $x_0=-3$

Б) $f(x)=\cos x$, $x_0= \pi/6$

В) $f(x)= \frac{17}{2\sqrt{x}}$, $x_0= 2$

Г) $f(x)= \frac{2}{x}$, $x_0=1$

2. Написать уравнение касательной в точке x_0:

А) $f(x)=6x^3 - 2x^2 + 5x, x_0 = 1$

Б) $f(x)= \frac{3}{x}, x_0 = -3$

В) $f(x)= \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6}$

2 вариант

1. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции в точке x_0:

А) $f(x)= x^3-7x^2+2x$, $x_0=-1$

Б) $f(x)= \cos x$, $x_0= \pi/3$

В) $f(x)= \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0= 2$

Г) $f(x)= \frac{3}{x}$, $x_0=-2$

Написать уравнение касательной в точке x_0:

А) f(x)=$2x^3+x^2+4x, x_0=2$

Б) f(x)= $\frac{4}{x}, x_0=1$

В) f(x)= sin x, $x_0=\frac{3\pi}{4}$

Вариант 1

1.Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 $f(x)=-x^2+x+3, x_0=2$

.2.Найти угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с заданной абсциссой $f(x)=3x-x^3, x_0=-2$

.3 Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции y = $\sin\frac{x}{2}$ $x\in(0;\pi)$, в точке (x_0, y_0) равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите x_0 ? y_0.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) - $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{6}$

4 В какой точке графика функции $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$ касательная к графику будет параллельна прямой, заданной уравнением y = -2x ?

A) (-4; 0) B) (0; 4) C) (4; 0) D) (0; -4) E) (2; 4)

5.В каких точках касательная к графику функции $y=\frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ох угол в 135^0?

6.В точке А(5;0) проведена касательная к графику функции $y=\frac{30}{x}-\frac{6x}{5}$.
Найти длину отрезка касательной, заключенного между осями координат.

7. Найти площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции y=f(x)

в точке с абсциссой x_0 $y=\frac{x}{2x-1}, x_0=1$

8.В какой точке нужно провести касательную к графику функции $y=x+\frac{3}{x}$,
чтобы она пересекла ось ординат в точке (0,1)

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №65-69

<u>Вычисление производных</u>

Цель: закрепить понятие производной, решать задачи, приводящие к понятию производной, закрепить умение применять физический и геометрический смысл производной на конкретных примерах.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Найдите производные следующих функций:

А)

1. $\left(x^3-4\right)'=$ 2. $\left(\frac{1}{x}+2x\right)'=$ 3. $\left(5x^5-\sqrt{x}\right)'=$

4. $\left(\frac{1}{2}x^2+4\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)'=$ 5. $\left((3x+7)\cdot\left(7x^3+5x-4\right)\right)'=$ 6. $\left(\frac{4x^2+8}{5-2x^3}\right)'=$

В)

1. $\left((5x+1)^3\right)'=$ 2. $\left(\frac{1}{3x-7}\right)'=$ 3. $\left(-\sqrt{7-2x}\right)'=$

4. $\left(ex^2+\frac{\pi}{x}\right)'=$ 5. $\left((3\pi+7)\cdot\left(7x^3+5x-4\right)\right)'=$ 6. $\left(\frac{4x^2+8}{5e+\pi}\right)'=$

С) 1. Найдите производную функции $y=3x^4+4x^3+5x^2+8x$ в точке $x_0=0$

2. Найдите производную функции:

а) $y=\frac{x^2+1}{x-3}$; б) $y=\sqrt{x^3+1}$; в) $y=(2x+4)^2$;

Д) Определить угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y=\ln x+\frac{x^6}{12}$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

1. Под каким углом пересекает ось абсцисс касательная, проведённая к графику функции $y=2\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x=3$

2. Касательная проведённая к графику функции $y=2x^2-7x+6$ параллельна прямой $y=3+x$. Найдите координаты точки, в которой проведена касательная.

3. Дан график производной функции $y=f(x)$ определённой на интервале (-8; 12). Определить

а) точки максимума функции;

б) количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=5-2x$;

в) точку, в которой функция принимает наибольшее значение на промежутке [3; 11];

г) наименьшее значение абсциссы точки, в которой касательная к графику функции проведена под углом 45°;

д) абсциссу точки, в которой касательная к графику функции имеет наибольший угловой коэффициент.

Вариант 1

1. Найдите производные функций:

a) $y = x^2(2 - x)$

b) $y = \frac{x\cdot(x^2-3)}{1+x}$

c) $y = (2x - 5)^{15}$

d) $y = 2\cos x - \sin x$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$

Вариант 2

1. Найдите производные функций:

a) $y = x^2(1 - 2x)$

b) y = $\frac{x\cdot(x^2+4)}{2+x}$

c) $y = (3x - 2)^{15}$

d) $y = 3\sin x - \cos x$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 3 - 2x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$

Вариант 3

1. Найдите производные функций:

a) $y = x\cdot(2 - x^2)$

b) $y = \frac{x\cdot(x^2-4)}{2+x}$

c) $y = (2 - 5x)^{10}$

d) $y = \cos x + 2\sin x$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2 - 5x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$

Вариант 4

1. Найдите производные функций:

a) $y = x^2(1 + 3x)$

b) $y = \frac{x\cdot(x^2-2)}{3+x}$

c) $y = (2 - 3x)^{14}$

d) $y = \sin x - 3\cos x$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 1 + 3x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$

Вариант 5

1. Найдите производные функций:

e) $y = x^3 + \frac{1}{x} - 1$

f) $y = \frac{x}{3+x}$

g) $y = (7 - 3x)^{11}$

h) $y = \frac{1}{2}\sin x - \cos x$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 1 + 5x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$

Вариант 6

1. Найдите производные функций:

a) $y = 16 \cdot \sqrt{x} - 4x^2$

b) $y = \frac{2x+3}{2-3x}$

c) $y = (2 - x)^{13}$

d) $y = 2\cos x + 2\sin x$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 7 - 5x - 2x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$

Вариант 7

1. Найдите производные функций:

a) $y = x^2 - \frac{1}{x} + 3$

b) $y = \frac{x^2}{3+x}$

c) $y = (4 - 3x)^8$

d) $y = \cos x - \log_5 x$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 7 + 5x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$

Вариант 8

1. Найдите производные функций:

a) $y = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$

b) $y = \frac{x^5}{3x+2}$

c) $y = (4 - 3x)^6$

d) $y = x^6 \cdot \ln x$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции
$y = x^4 - 2x^3 + 4x - 12$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$

Вариант 9

1. Найдите производные функций:

a) $y = (x - 6) \cdot x^3$

b) $y = \frac{x^3 - x}{x^2+1}$

c) $y = \sqrt{(4 - 3x)}$

d) $y = \cos(-6x + 7)$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №70

Первообразная

Цель: закрепить понятие первообразной функции, научить учащихся определять является ли функция F(x) первообразной для функции f(x).

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1.Докажите,что функция F(x) является первообразной для функции f(x) на R:

$F(x)=\frac{1}{5}x^5-\sin^2 x F(x)=\frac{2}{7}x^7-\cos^2 x$ $\qquad$ $F(x)=x^4-\sin 2x\ f(x)=2x^6+\sin 2x$

2.Для функции

$y=\frac{2}{\sqrt{x}}+4x$ $\qquad$ $y=\frac{3}{x^2}+x^2-x$

найдите первообразную, которая удовлетворяет условию

F(4)=2 $\qquad$ F(1)=3

3. Найти первообразную в общем виде

а) $f(x)=9x^8+8x^7+15$ $\qquad$ а) $f(x)=10x^9+6x^5+5x$

б) $f(x)=\frac{5}{2\sqrt{3x+2}}+\frac{1}{\sin^2 4x}$ $\qquad$ б) $f(x)=\frac{6}{5\sqrt{4x+2}}+\frac{1}{\cos^2 5x}$

в) $f(x)=5\sin\frac{x}{5}+\cos 2x$ $\qquad$ в) $f(x)=3\cos\frac{x}{3}+\sin 3x$

4.Найти первообразную, график которой проходит через т.А

а) $f(x)=3x^2-2x+4$; A(-1;1) $\qquad$ а) $f(x)=4x-6x^2+1$; A(0;2)

б) $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}$; A(-1;4) $\qquad$ б) $f(x)=\frac{1}{x^2}-10x^4+3$; A(1;5)

в) $f(x)=\sin 2x$; A($\frac{\pi}{4}$;-2) $\qquad$ в) $f(x)=\sqrt{2}\cos x$; A($\frac{\pi}{4}$;2)

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;

- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №71

Неопределенный интеграл

Цель: закрепление умений вычислять неопределенные интегралы.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Вычислить: $\int \sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^3}-3^x dx.$
2. Вычислить: $\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx.$
3. Вычислить: $\int x arctgx dx.$
4. Вычислить $\int \sqrt[4]{x}+\sqrt[7]{x^3}-4^x dx.$
5. Вычислить: $\int \frac{x^2dx}{\left(x^3+4\right)^6}.$
6. Вычислить: $\int e^x \ln\left(1+e^x\right)dx.$
7. Вычислить: $\int \sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x^4}-5^x dx.$
8. Вычислить: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}.$
9. Вычислить: $\int x2^x dx.$
10. Вычислить: $\int \sqrt[6]{x}+\sqrt[7]{x^4}-6^x dx.$
11. Вычислить: $\int \frac{\sin 2x dx}{5-\cos 2x};$
12. Вычислить: $\int xe^{5x}dx;$

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;

- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №72

Определенный интеграл

Цель: закрепление умений вычислять неопределенные интегралы.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений

Задание

1. Вычислить: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$
2. Вычислить: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$

3. Вычислить: $\int_0^1 xarctgxdx$
4. Вычислить: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx.$
5. Вычислить: $\int_0^1 xarctgxdx$
6. Вычислить объем фигуры, образованной вращением функции $y = x^2$ вокруг оси Ох и ограниченной линиями х=0 и х=2.
7. Вычислить объем фигуры, образованной вращением функции $y = x^2$ вокруг оси Ох и ограниченной линиями х=1 и х=3.
8. Вычислить объем фигуры, образованной вращением функции $y = x^2$ вокруг оси Ох и ограниченной линиями х=2 и х=4.
9. Вычислить объем фигуры, образованной вращением функции $y = x^2$ вокруг оси Ох и ограниченной линиями х=1 и х=3.
10. Вычислить объем фигуры, образованной вращением функции $y = x^2$ вокруг оси Ох и ограниченной линиями х=0 и х=2

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №73

<u>Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции</u>

Цель: закрепить знания оинтеграле

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Пример 1

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

Пример 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x}$, $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$.

Пример 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4x – x^2$, $y = 5$, $x = 3$.

Пример 4

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $3x^2+4y=0$, $2x+4y+1=0$

Пример 5

Вычислить S фигуры, ограниченной линиями $y = (x + 2)^2$, $x = 0$, $y = 0$.

Пример 6

Найти S фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = x + 3$.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №74

Решение рациональных, логарифмических уравнений

Цель: закрепить знания о показателях степени и логарифмах

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Найдите корень уравнения $\log_2(7-x) = 6$.
2. Найдите корень уравнения $\log_2(3+x) = 7$.
3. Найдите корень уравнения $\log_7(9-x) = \log_7 8$.
4. Найдите корень уравнения $\log_{11}(16+x) = \log_{11} 12$.
5. Найдите корень уравнения $\log_7(x+9) = \log_7(5x-7)$.
6. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{7}}(7-3x) = -2$.
7. Найдите корень уравнения $\log_5(5-5x) = 2\log_5 2$.
8. Решите уравнение $\log_5(x^2+4x) = \log_5(x^2+11)$.
9. Решите уравнение $\log_2(2-x) = \log_2(2-3x)+1$.
10. Решите уравнение $\log_{x-7} 25 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.
11. Решите уравнение $\log_{x+6} 32 = 5$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.
12. Найдите корень уравнения $\log_9 3^{6x-1} = 4$.
13. Найдите корень уравнения $3^{\log_9 2x+8} = 2$.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №75

Менеджмент как вид деятельности

Цель: расширение теоретических знаний и развитие практических умений по теме «Менеджмент как вид деятельности», развитие умений проводить поиск необходимой информации в источниках различного типа и представлять результаты изучения материала в форме реферата, формирование умений применять знания в решении практических задач.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, аналитическая обработка текста, подготовка реферата. Решение ситуационной задачи, ответы на контрольные вопросы.

Задание

Написать реферат на одну из указанных тем

Темы рефератов:

1. Менеджмент как наука, практика, искусство.
2. Социальная ответственность менеджмента.
3. Предпосылки появления понятия «менеджмент».

Формат выполненной работы: реферат

Критерии оценки реферата: соответствие теме; глубина проработки материала; правильность и полнота использования источников; владение терминологией и культурой речи; оформление реферата.

Контроль выполнения: защита реферата.

Самостоятельная работа №76-78

Решение задач на элементарные и сложные события

Цель: закрепить классическое определение вероятности события, сформулировать правило вычисления вероятностей.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Задача 1. Среди 15 студентов группы, из которых 8 девушек, разыгрывается 6 билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки?

Задача 2. Из ящика, содержащего 20 небракованных и 10 бракованных изделий, поочередно извлекается два изделия без возвращения. Какова вероятность при первом и втором извлечениях получить небракованные изделия?

Задача 3. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45; во вторую – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо в третью область.

Задача 4. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих, 15 белых. Найти вероятность того, что вынутый наудачу шар будет цветной (не белый).

Задача 5. По многолетним данным для данного района вероятность весенних засух равна 0,4, а летних – 0,6. Какова вероятность того, что в наступающем году будет засуха.

Задача 6. Три стрелка производят по одному выстрелу в цель независимо друг от друга. Вероятности попадания в цель для каждого из них равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что: а) в цель попадет только один стрелок; б) в цель попадут только два стрелка; в) в цель попадет хотя бы один стрелок.

Задача 7. Среди 15 микрокалькуляторов, имеющихся в вычислительной лаборатории, лишь 6 новых, а остальные – бывшие в употреблении. Наугад взято три микрокалькулятора. Какова вероятность, что все они окажутся новыми?

Задача 8. Известно, что на факультете 80% студентов-заочников могут получить вызов на экзаменационную сессию. Найти вероятность того, что из 40 случайно отобранных студентов факультета 30 получат вызов.

Задача 9. Вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах будет не менее 70 поражение мишени?

Задача 10. Сколько нужно посеять семян, всхожесть которых 70%, чтобы наивероятнейшее число взошедших семян было равно 60?

Задача 11. Установлено, что всхожесть партии гороха составляет 95%. Отбирается 6 зерен. Какова вероятность того, что они дадут не менее 5 всходов? не более 3 всходов?

Задача 12. Магазин продает продукцию трех сортов, причем первого сорта – 70%. На специализированном заводе изготовлено 25% продукции первого сорта, 75% продукции второго сорта и 25% продукции третьего сорта, продаваемой магазином. Сколько процентов продукции третьего сорта продает магазин, если взятая на контроль продукция оказалась изготовленной на специализированном заводе, а вероятность того что эта продукция 1-го сорта равна 50%.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №79-80

<u>Решение задач по стереометрии</u>

Цель: обобщение и применение аксиом и их следствий к решению задач

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Задача №1 Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см и наклонена к плоскости основания под углом 60º. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задача №2. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 24 3 см и наклонена к плоскости его основания под углом 30º. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задача №3. Расстояние от центра основания конуса до середины образующей равно 6 см. Угол между образующей и плоскостью основания равен 60º. Найдите площадь осевого сечения.

Задача №4. Расстояние от центра основания конуса до образующей равно 3 см. Угол при вершине осевого сечения равен 120º. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Задача №5. В основании прямой призмы лежит ромб с большей диагональю, равной 6 3 см. Большая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 30º, меньшая - угол 45º. Найдите объем призмы.

Задача №6. В основании прямой призмы лежит ромб. Большая диагональ призмы равна 12 см и наклонена к плоскости основания под углом 30º, а меньшая образует с боковым ребром угол 45º. Найдите объем призмы

Задача №7. Осевое сечение конуса прямоугольный треугольник. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если радиус основания конуса равен 5 см.

Задача №8. Осевое сечение конуса равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найдите объем конуса.

Задача №9. Площадь боковой поверхности конуса равна 136π см², а его образующая равна 17 см. Найдите объем конуса.

Задача №10. Площадь боковой поверхности конуса равна 65π см², а его образующая равна 13см. Найдите объем конуса.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №81-82

Расположение прямых в пространстве

Цель: закрепить знания о расположении прямых в пространстве

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M, N и P — середины отрезков DA, DB и DC соответственно, точка К лежит на отрезке BN. Выясните взаимное расположение прямых: а) ND и АВ; б) РК и ВС; в) MN и АВ; г) МР и АС; д) KN и АС; е) MD и ВС.

2. Через точку М, не лежащую на прямой a, проведены две прямые, не имеющие общих точек с прямой a. Докажите, что по крайней мере одна из этих прямых и прямая a являются скрещивающимися прямыми.

3. Прямая с пересекает прямую а и не пересекает прямую b, параллельную прямой а. Докажите, что b и с — скрещивающиеся прямые.

4. Прямая m пересекает сторону АВ треугольника ABC. Каково взаимное расположение прямых m и ВС, если: а) прямая m лежит в плоскости ABC и не имеет общих точек с отрезком АС; б) прямая m не лежит в плоскости ABC?

5. Через вершину А ромба ABCD проведена прямая a, параллельная диагонали BD, а через вершину С — прямая b, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что: а) прямые a и CD пересекаются; б) a и b скрещивающиеся прямые.

6. Докажите, что если AB и CD скрещивающиеся прямые, то AD и BC также скрещивающиеся прямые.

7. На скрещивающихся прямых a и b отмечены соответственно точки M и N. Через прямую a и точку N проведена плоскость α, а через прямую b и точку M — плоскость β. а) Лежит ли прямая b в плоскости α? б) Пересекаются ли плоскости α и β? При положительном ответе укажите прямую, по которой они пересекаются.

8. Может ли каждая из двух скрещивающихся прямых быть параллельна третьей прямой? Ответ обоснуйте.

9. Даны параллелограмм ABCD и трапеция ABEK с основанием EK, не лежащие в одной плоскости, а) Выясните взаимное расположение прямых CD и EK. б) Найдите периметр трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность и AB = 22,5 см, EK = 27,5 см.

10. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника* являются вершинами параллелограмма.

11. Прямые OB и CD параллельные, а OA и CD — скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми OA и CD, если: а) ∠AOB = 40°; б) ∠AOB= 135°; в) ∠AOB = 90°.

12. Прямая a параллельна стороне BC параллелограмма ABCD и не лежит в плоскости параллелограмма. Докажите, что a и CD — скрещивающиеся прямые, и найдите угол между ними, если один из углов параллелограмма равен: а) 50°; б) 121°.

13. Прямая m параллельна диагонали BD ромба ABCD и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что: а) m и AC — скрещивающиеся прямые — и найдите угол между ними; б) m и AD — скрещивающиеся прямые — и найдите угол между ними, если ∠ABC=128°.

14. В пространственном четырехугольнике ABCD стороны AB и CD равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №83-84

Параллельность плоскостей, перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства

Цель: закрепить знания о плоскостях

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Неперпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN. В плоскости β из точки A проведен перпендикуляр AB к прямой MN и из той же точки A проведен перпендикуляр AC к плоскости α. Докажите, что ABC линейный угол двугранного угла AMNC.

2. Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости α, а катет наклонен к этой плоскости под углом 30. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью треугольника.
3. Докажите, что плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей
4. Двугранный угол равен φ. На одной грани этого угла лежит точка, удаленная на расстояние d от плоскости другой грани. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла
5. Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, а угол между плоскостью α и ABC равен 60. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если AC = 5 см, AB = 13 см.
6. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Докажите, что четырехугольник ACBM является прямоугольником. Найдите расстояние от точки M до прямой a, если AM = m, BM = n.
7. На ребре двугранного угла 120 взят отрезок длиной c, и из его концов проведены перпендикуляры к нему, лежащие в различных гранях данного двугранного угла и имеющие длины a и b. Найти длину отрезка прямой, соединяющего концы этих перпендикуляров.
8. Из вершины B треугольника ABC, сторона AC которого лежит в плоскости α, проведен к этой плоскости перпендикуляр BB1. Найдите расстояния от точки B до прямой AC и до плоскости α, если AB = 2 см, BAC = 150 и двугранный угол BACB1 равен 45
9. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Докажите, что четырехугольник ACBM является прямоугольником. Найдите расстояние от точки M до прямой a, если AM = m, BM = n.
10 Общая сторона AB треугольников ABC и ABD равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите CD, если треугольники равносторонние; прямоугольные равнобедренные с гипотенузой AB

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №85-86

Расстояния от точки до плоскости

Цель: закрепить знания о плоскостях

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами AB=2, BC=4, AA_1=6. Найдите расстояние от точки D до плоскости ACD_1.

2. Прямые a и b лежат в параллельных плоскостях α и β. Могут ли эти прямые быть: а)параллельными; б) скрещивающимися? Сделайте рисунок для каждого возможного случая.

3. Через точку O, лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые l и m. Прямая l пересекает плоскости α и β в точках A_1 и A_2 соответственно, прямая m – в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка A_2B_2, если A_1B_1 = 12 см, $B_1O : OB_2$ = 3 : 4.

4. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки M, N и K, являющиеся серединами рёбер AB, BC и DD_1.

5. Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AC. Точка P – середина стороны AD, точка K – середина DC.

а) Каково взаимное расположение прямых PK и AB?

б) Чему равен угол между прямыми PK и AB, если угол ABC равен 40^0 и угол BCA равен 80^0? Ответ обоснуйте.

6. Дан пространственный четырёхугольник $ABCD$, M и N – середины сторон AB и BC соответственно, точка E принадлежит стороне CD, точка K принадлежит стороне DA, $DE : EC$ = 1 : 2, $DK : KA$ = 1 : 2.

а) Выполните рисунок к задаче.

б) Докажите, что четырёхугольник $MNEK$ – трапеция.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №87-89

<u>Многогранники. Решение задач</u>

Цель: закрепить знания о многогранниках

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Основанием пирамиды $DABC$ является правильный треугольник ABC, сторона которого равна a. Ребро DA перпендикулярно к плоскости ABC, а плоскость BCD составляет с плоскостью ABC угол 30^0. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна a и угол равен 60^0. Плоскость AC_1D_1 составляет с плоскостью основания угол 60^0. Найдите:

а) высоту ромба;

б) высоту параллелепипеда;

в) площадь боковой поверхности параллелепипеда;

г) площадь поверхности параллелепипеда.

3. Основанием пирамиды $MABCD$ является квадрат $ABCD$, ребро MD перпендикулярно к плоскости основания, $AD = DM = a$. Найдите площадь поверхности пирамиды.

4. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$, стороны которого равны $2a$ и $a\sqrt{2}$, острый угол равен 45^0. Высота параллелепипеда равна меньшей высоте параллелограмма. Найдите:

а) меньшую высоту параллелограмма;

б) угол между плоскостью ABC_1 и плоскостью основания;

в) площадь боковой поверхности параллелепипеда;

г) площадь поверхности параллелепипеда.

5. В правильной треугольной пирамиде SABC точка L − середина ребра AC , S − вершина. Известно, что BC = 8, а SL = 7. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

6. Дан прямоугольный параллелепипед с размерами 5 см, 12 см и 20 см. Найти диагональ параллелепипеда, диагональ боковой грани параллелепипеда и полную площадь его поверхности.

7. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 21см и 13 см и высотой 3 см. Найдите площадь боковой поверхности, если боковое ребро равно 8 см.

8. Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 10 см и 24 см, боковое ребро равно 5 см. Найдите площади боковой и полной поверхности призмы.

9. В правильной треугольной пирамиде SABC точка L − середина ребра AC , S − вершина. Известно, что BC = 10, а SL = 9. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

10. Дан прямоугольный параллелепипед с размерами 8 см, 6 см и 12 см. Найти диагональ параллелепипеда, диагональ боковой грани параллелепипеда и полную площадь его поверхности.

11. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 11 см и 27 см и высотой 6 см. Найдите площадь боковой поверхности, если боковое ребро равно 10 см.

12. Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см, боковое ребро равно 12 см. Найдите площади боковой и полной поверхности призмы.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №90-91

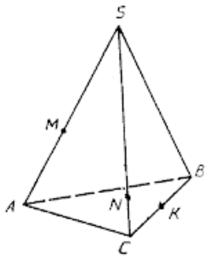
Пирамида. Сечение многогранников

Цель: решать задачи на построение сечений

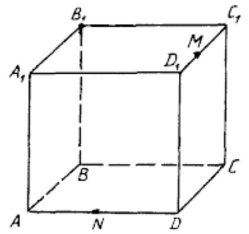
Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

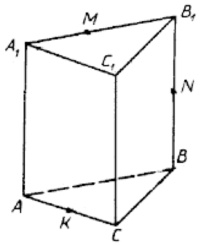
Задача 1. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: A_1; $M \in B_1C_1$; $N \in AD$.



Задача 2. Построить сечение тетраэдра SABC плоскостью, проходящей через точки: $M \in SA$; $N \in SC$; $K \in BC$.



Задача 3. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $M \in C_1D_1$; B_1 и $N \in AD$.



Задача 4. Построить сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$плоскостью, проходящей через точки: $M \in A_1B_1$; $N \in BB_1$ и $K \in AC$.

Задача 5. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки A1, $M \in B_1C_1$и $N \in DD_1$ и найти линию пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания куба.

Задача 6. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $M \in A_1B_1$; $N \in B_1C_1$ и $K \in DD_1$.

Задача 7. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки $M \in D_1C_1$, $N \in CC_1$ и $K \in AA_1$.

Задача 8. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $M \in$ грани $A_1B_1C_1D_1$; $N \in DD_1$ и $K \in AD$.

Задача 9. Построить сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки: $M \in AC$; $N \in CC_1$; $K \in BB_1$.

Задача 10. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $M \in AA_1$; $N \in B_1C_1$; $K \in DC$. (Точки M, N и K лежат на скрещивающихся ребрах).

Задача 11. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $M \in AA_1D_1D$; $N \in A_1B_1C_1D_1$; $K \in DDC_1C$.

Задача 12. В треугольной пирамиде SABC провести сечение:

а) через середину ребра AC параллельно грани SCB;
б) через середину ребра SC параллельно грани SAB.
Задача 13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, которая проходит через данные точки: а) C_1, K, D; б) C_1, K, C, где точка К – середина A_1B_1. Определите, какая фигура образуется в сечении.
Задача 14. Точка X делит ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении AX : XB = 2 : 3. Постройте сечение этого куба плоскостью, которая параллельна плоскости AA_1C_1 и проходит через точку X. Найдите периметр сечения, если AB = a.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №92-93

Решение задач по теме «Цилиндр и конус»

Цель: закрепить умение решать задачи

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Высота цилиндра равна 16 см. На расстоянии 6 см от оси цилиндра проведено сечение, параллельное оси цилиндра и имеющее форму квадрата. Найдите радиус цилиндра.

2. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 дм и составляет с образующей угол 60°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

3. Радиус большего основания, образующая и высота усечённого конуса равны 7 см, 5 см и 3 см соответственно. Найдите площадь осевого сечения и боковой поверхности конуса.

4. Прямоугольник, одна из сторон которого равна 5 см, вращается вокруг неизвестной стороны. Найдите площадь прямоугольника, если площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна 60π см².

5. Хорда нижнего основания цилиндра удалена от центра нижнего основания на $2\sqrt{3}$ см и отсекает от окружности основания дугу в 60°. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с одним из концов данной хорды, образует с осью цилиндра угол 45°. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

6. Радиусы оснований усечённого конуса равны
1 дм и 7 дм, а диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны. Найдите площадь осевого сечения и полной поверхности конуса.

7. Прямоугольник, одна из сторон которого равна 5 см, вращается вокруг неизвестной стороны. Найдите площадь прямоугольника, если площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна 60π см².

8. Хорда нижнего основания цилиндра удалена от центра нижнего основания на $2\sqrt{3}$ см и отсекает от окружности основания дугу в 60°. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с одним из концов данной хорды, образует с осью цилиндра угол 45°. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

9. Радиусы оснований усечённого конуса равны

1 дм и 7 дм, а диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны. Найдите площадь осевого сечения и полной поверхности конуса.

10. Построить сечение треугольной призмы **ABCFED** плоскостью **α**, которой принадлежат точки **G,H,I**.

11. Построить сечение призмы **ABCDEA1B1C1D1E1** плоскостью **α**, которая задана следом **а** в плоскости **(ABC)** основания призмы и точки **M**, принадлежащей ребру **DD1**.

12. Построить сечение пятиугольной пирамиды **PABCDE** плоскостью, которая задана следом **l** и точкой **K** ребра **PE**.

13. Построить сечение призмы **ABCDEA1B1C1D1E1** плоскостью , где **M, P, R** являются точками соответственно ребер **AA1, CC1, EE1**.

14. Точки **P, Q, R** взяты на поверхности параллелепипеда **ABCDA1B1C1D1** следующим образом: точка **P** лежит в грани **CC1D1D**, точка **Q** – в грани **CC1D1D** точка **R** лежит на прямой **BB1** (вне отрезка **BB1**). Построить сечение параллелепипеда плоскостью **PQR**.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №94-95

<u>Отношения объемов подобных тел</u>

Цель: формирование навыков решения задач на вычисление объемов тел.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Задача 1 Вычислить какую площадь трубы необходимо обмотать пленкой, если d=1220мм, а ее длина 10 км.

Задача 2: Вычислить какую площадь трубы необходимо обмотать пленкой, если d=529 мм, а длина 10 км.

Задача 3: Подсчитать сколько пленки в одном рулоне и сколько нужно доставить рулонов на газопровод, если: высота рулона – 95 см. внешний радиус – 55 см. внутренний радиус – 3 см. толщина пленки – 0,2 мм.

Задача 4.

Куча щебня по краям шоссейной дороги представляет собой конус. Окружность основания конической кучи щебня 12,1 м. Длина образующей 4,6 м. Каков объем кучи?

Задача 5.

Яма в форме правильной усеченной четырехугольной пирамиды имеет объем 133 м^3. Найдите ее глубину, если сторона верхнего основания 9 м, а нижнего – 4м.

Задача 6.

Сколько сена (в кг) вмещает сеновал размерами 6*3*4 м, если тюк сена имеет размеры 0,8*0,4*0,5м и массу 20 кг.

Задача 7.

Какое количество кирпича сможет перевезти машина, имеющая размеры кузова 3,6м*2,3м*1м? Размеры кирпича 25см*12см*8см.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №96-97

Вычисление объемов тел и поверхностей вращения

Цель: формирование навыков решения задач на вычисление объемов тел.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

Задача 1. Учитывая грузоподъёмность автомобильного крана КС – 2561 – Е, определите: допускается ли его работа по разгрузке дорожных плит длиной 6 м, имеющих форму призмы, поперечное сечение которой — равнобочная трапеция с основанием 1,5 м и 1,4 м ? Толщина плиты 30 см.

Задача 2. Моток стальной проволоки диаметром 3 мм имеет массу 35,8 кг.
Какова ее длина?

Задача 3. Больному прописали глазные капли, по 2 капли 3 раза в день в оба глаза. Во флаконе 10 мл лекарства. Объем капли 1/9 мл. Хватит ли одного флакона на неделю?

Задача 4.Экскаватор должен вырыть траншею длиной 54 м, шириной 2 м и глубиной 3 м.

а) Какой объем грунта придется вынуть экскаватору?

б) Сколько раз придется зачерпнуть ковшом грунт, если объем ковша 2/5 м3?

Задача 5. У Васи есть кубики с ребром 3 см. а) Из всех кубиков можно построить сразу два больших куба с ребрами 12 см и 6 см. Сколько всего кубиков у Васи? б) Все кубики заполняют доверху коробку длиной 18 см и шириной 6 см. Какова высота коробки?

Задача 6. В конус вписан шар. Найти объём шара, если образующая конуса равна l и наклонена к основанию конуса под углом a.

Задача 7. Основание четырёхугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной b и углом α между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с основанием угол β. Найти объём пирамиды.

Задача 8. В шар объемом $4\sqrt{3}$ дм^3 вписан цилиндр, образующая которого видна из центра шара под углом 60^o. Найти объем цилиндра.

Задача 9.

В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от центра симметрии основания до бокового ребра равно d. Двугранный угол при ребре с основанием равен α. Найти объем пирамиды.

Задача 10.В цилиндр вписан шар. Найти объем шара, если объём цилиндра равен 7.5 см^3.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №98

Векторы. Действия над векторами.

Цель: ввести определения вектора в пространстве, равенства векторов. Рассмотреть правила действия над векторами, правило сложения нескольких векторов в пространстве.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Треугольник ABC задан в прямоугольной системе координат пространства. Найдите:

а. Координаты всех векторов;

б. Периметр треугольника ABC;

в. Косинусы всех углов треугольника;

г. Координаты середин сторон треугольника;

д. Координаты центра тяжести треугольника ABC;

2. Найдите координаты вектора AB, если $A(-2;-3)$, $B(1;4)$.

3. Точка $C(2;3)$ делитABв отношении 1:4 (отAкB). Найдите точкуA, еслиB(-6;-1).

4. Найдите точку M, равноудаленную от осей координат и от данной точкиA(4;-2).

5. Вычислите угол между векторами $\overline{a}=(-3;4)$ и $\overline{b}=(4;3)$.

6. Даны векторы $\overline{a}=(2;3;-1)$, $\overline{b}=(0;1;4)$ и $\overline{c}=(1;0;-3)$. Определите координаты вектора: а) $2a-b-2c$;

б) $a-b-3c$.

7. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}=(2;4)$ и $\overline{b}=(4;1)$.

8. Вычислите k и l, если:

1) $3i+5j=ki+(2l+1)\cdot j$;

2) $(k+l-1)\cdot i=(2k-l)\cdot j$;

3) $(2k-l-1)\cdot i-(3k+l+10)\cdot j=0$;

4) $ki+lj=(l+1)\cdot i-(k-1)\cdot j$.

9. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $i-2j+k$ и $2i+k$;

2) $2j+3k$ и $i-j-2k$;

3) $2i - j - k$ и $4i - 3j + 5k$;

4) $6i + 4k$ и $2i - j$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение вектора.
2. Что понимается под длиной или модулем вектора?
3. Какие векторы называются коллинеарными?
4. Что мы понимаем под произведением вектора на число?
5. Что называется суммой векторов? Какие правила нахождения сумм векторов существуют?
6. Что называется разностью двух векторов? Как построить разность двух векторов?
7. Дайте определение скалярного произведения двух векторов?
8. По какой формуле вычисляется скалярное произведение в координатах?
9. По какой формуле вычисляется угол между двумя векторами в координатах?

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №99

Решение задач координатным методом

Цель: совершенствование навыков решения задач методом координат

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

№1 Докажите, что три прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

№2 Докажите теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

№3 Докажите теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

№4 Найдите множество всех точек, для каждой из которых отношение расстояний от двух точек A и B есть постоянная величина λ, не равная единице.

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №100

<u>Линейные операции над векторами</u>

Цель: закрепить знания о линейных операциях над векторами

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Если два коллинеарных вектора направлены в разные стороны, то они - ______________.
2. Любая точка плоскости является ___________________.
3. _________________или модулем ненулевого вектора называется длина этого отрезка.
4. Ненулевые вектора называются _________________________, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.
5. Вектор разности выходит из _______________вектора ____________ и приходить в _________________ вектора ______________.
6. Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, какая – концом, называется _____________.
7. Если два коллинеарных вектора направлены в одну сторону, то они - ___________________.
8. Два вектора называются _______________ если они сонаправлены и их длины равны.
9. От любой точки можно отложить вектор равный данному и притом только ________.
10. Нулевой вектор ________________________ коллинеарным любому вектору.
11. Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, какая – концом, называется _____________.
12. Любая точка плоскости является ___________________.
13. _________________или модулем ненулевого вектора называется длина этого отрезка.
14. Ненулевые вектора называются _________________________, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.
15. Нулевой вектор ________________________ коллинеарным любому вектору.
16. Если два коллинеарных вектора направлены в одну сторону, то они - ____________.
17. Если два коллинеарных вектора направлены в разные стороны, то они - ___________.
18. Два вектора называются _______________если они сонаправлены и их длины равны.
19. От любой точки можно отложить вектор равный данному и притом только ________.
20. По правилу треугольника вектор суммы выходит их __________________ первого вектора и заканчивается в __________________ второго.
21. Вектор разности выходит из _______________вектора ____________ и приходить в _________________ вектора _________

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

Самостоятельная работа №101-102

Использование векторов при решении математических и прикладных задач

Цель: закрепить классическое определение вероятности события, сформулировать правило вычисления вероятностей.

Самостоятельная работа обучающихся: работа с дополнительной литературой, решение выражений.

Задание

1. Доказать, что линия, соединяющая середины диагоналей произвольной трапеции параллельна основаниям этой трапеции и равна их полуразности. Информация взята с сайта биржи Автор24: https://spravochnick.ru/matematika/vektory/primenenie_vektorov_k_resheniyu_zadach/ .

2. Дана окружность радиуса r и на ней точка A. Найдите множество точек Ω, делящих все возможные хорды, проходящие через точку A, в одном и том же отношении λ, где $\lambda > 0$.

3. На векторах и построен треугольник (рис. 1.60). Требуется найти:

а) длины сторон треугольника;

б) длину медианы ;

в) длину биссектрисы ;

г) величину угла ;

д) площадь треугольника;

е) координаты вектора (в стандартном базисе), где отрезок — высота треугольника.

4. На векторах построена треугольная пирамида (рис.1.61). Требуется найти:

а) длины ребер ;

б) величину угла ;

в) площадь треугольника ;

г) объем пирамиды ;

д) высоту пирамиды , опущенную из вершины ;

е) высоту треугольника , опущенную из верершины ;

ж) угол между ребром и плоскостью грани ;

з) величину угла между плоскостями граней и ;

и) радиус-вектор , где — точка пересечения медиан треугольника ;

к) радиус-вектор , где точка делит отрезок в отношении ;

л) направляющие косинусы вектора ;

м) алгебраическое значение ортогональной проекции вектора на направление вектора ;

н) ортогональную проекцию вектора на прямую, перпендикулярную грани ;

о) единичный вектор (орт), имеющий направление вектора ;

п) вектор , имеющий длину вектора и направление вектора .

Формат выполненной работы: выполнение практических заданий в тетради для самостоятельных работ.

Критерии оценки:

- уровень освоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.

Контроль выполнения: выступление на занятии.

10. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ С ТЕКСТОМ

Умения работать с заголовком учебного текста, информацией:

– формулировать вопросы к заголовку;

– выделять какими знаниями, умениями по данной теме уже владеете;

– установить, почему именно эти слова вынесены в заголовок;

– предвосхищать, что из ранее неизвестного может открыться;

– осознать, что неизвестно по этой теме;

– переформулировать заголовок в форму вопроса.

Умения, необходимые для структурирования информации:

– делить информацию на относительно самостоятельные смысловые части;

– выделять в смысловой части главное (с точки зрения поставленной учебной задачи) и вспомогательное, новое и уже знакомое;

– выделять в смысловой части, о чем говорится (объект) и что о нем говорится;

– оценивать информативную значимость выделенных мыслей – соотносить их с теми или иными категориями содержательной структуры информации (фактами, явлениями, понятиями, законами, теориями);

– определять логические и содержательные связи и отношения между мыслями информации;

– выделять «смысловые и опорные пункты», элементы информации, несущие основную смысловую нагрузку (термины, понятия, формулы, рисунки и др.);

– группировать по смыслу выделенные при анализе информации мысли, объединяя их в более крупные части;

– формулировать главные мысли этих частей, всей информации;

– обобщать то, что в тексте дано конкретно;

– конкретизировать то, что дано обобщено;

– доказывать, аргументировать то, что не доказано, но требует доказательства;

– выделять трудное, непонятное;

– формулировать вопрос по учебной информации;

– выделять противоречия с ранее известным, с собственным опытом;

– соотносить результаты изучения с поставленными целями, вопросами;

– синтезировать информацию, полученную из разных источников.

Умения письменной фиксации результатов работы с учебной информацией:
– составлять план (простой или сложный), отражать информацию графически;
– отражать содержание информации тезисно;
– составлять конспект (следящий, структурный и др.)

Коммуникативные умения:
– устно характеризовать систему вопросов, освещенных в учебной информации;
– тезисно излагать содержание информации;
– развернуто излагать содержание.

Умения контролировать свою работу с учебной информацией:
– воспроизводить изученное;
– составлять тезаурус понятий темы;
– подбирать, конструировать задания на применение изученного;
– приводить собственные примеры;
– устанавливать связи изученного с ранее известным.

11. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ОФОРМЛЕНИЯ И НАПИСАНИЯ РЕФЕРАТА

«Реферат» имеет латинские корни и в дословном переводе означает

«докладываю, сообщаю». Словари определяют его значение как «краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научной проблемы, результатов научного исследования: доклад на определенную тему, освещающий ее на основе обзора литературы и других источников.

1. Студенческий реферат – это творческая работа студента, в которой на основании краткого письменного изложения и оценки различных источников проводится самостоятельное исследование определенной темы, проблемы.

2. Реферат отличают следующие признаки:

а) реферат не копирует дословно содержание первоисточника, а представляет собой новый вторичный текст, создаваемый в результате систематизации и обобщения материал первоисточника, его аналитико-синтетической переработки («аналитико-синтетическая переработка первичного документа с целью создания вторичного») (ГОСТ Р ИСО 10011-2-93)

б) будучи вторичным текстом, реферат создается со всеми требованиями, предъявляемыми к связному высказыванию, то есть ему должны быть присущи следующие черты: целостность, связность, структурная упорядоченность и завершенность.

в) в реферат должно быть включено самостоятельное мини-исследование, осуществляемое на материале или художественных текстов, или источников по теории и истории литературы.

3. Студенческий реферат должен иметь следующую структуру:
– титульный лист
– план работы (содержание)
– введение

– основная часть
– заключение
– список литературы
– приложение (по необходимости)

Во введении, как правило, дается краткая характеристика изучаемой темы, обосновывается ее актуальность, раскрываются цель и задачи работы, производится краткий обзор литературы и важнейших источников, на основании которых готовился реферат.

В основной части кратко, но полно излагается материал по разделам, каждый из которых раскрывает свою проблему или разные стороны одной проблемы. Каждый смысловой блок (глава, параграф) должен быть озаглавлен.

Заключение должно быть четким, кратким, вытекающим из содержания основной части. В нем должны содержаться выводы по результатам работы, а также информация о согласии или несогласии с авторами цитируемых работ, даны указания на то, кому могут быть интересны книги, тексты, рассмотренные в реферате. Заключение не должно превышать по объему введения.

4. Объем реферата жестко не регламентируется, однако он не должен превышать 20 машинописных страниц.

5. Требования к оформлению:

Реферат должен быть написан на бумаге стандартной формы (лист 4А, с полями слева 2,5 – 3 см, сверху и снизу – 2 см, справа – до 1 см) и вложен в папку.

Нумерация страниц должна быть сквозной, включая список используемой литературы и приложения. Нумеруют страницы арабскими цифрами в правом нижнем углу или сверху посредине листа. Первой страницей является титульный лист, на нём номер страницы не ставится.

Схема оформления титульного листа (приложение 1), содержания (приложение 2) студенческого реферата прилагается.

Список литературы завершает работу. В нем фиксируются источники, с которыми работал автор реферата. Список составляется в алфавитном порядке по фамилиям авторов или заглавия книг. При наличии нескольких работ одного автора их названия располагаются по годам изданий. Библиографические данные оформляются в соответствии с ГОСТом.

12. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ОФОРМЛЕНИЯ СООБЩЕНИЯ, ДОКЛАДА

Объем сообщения обычно составляет 2-3 страницы формата А-4

Сообщение, доклад оформляют стандартно:

Шаблонный машинописный текст имеет следующие параметры:

– шрифт Times New Roman;
– размер шрифта 14;
– межстрочный интервал 1,5;
– стандартные поля для редактора Word;
– выравнивание по ширине.

Ссылки на источники указываются по требованию преподавателя.

В идеале, сообщение, доклад еще должны содержать приложения – таблицы, схемы, копии документов – однако, чаще это не практикуется.

13. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ОФОРМЛЕНИЯ ПРЕЗЕНТАЦИИ

Требования к презентации

На первом слайде размещается:

– название презентации;

– автор: ФИО, группа, название учебного учреждения (соавторы указываются в алфавитном порядке);

– год.

На втором слайде указывается содержание работы, которое лучше оформить в виде гиперссылок (для интерактивности презентации).

На последнем слайде указывается список используемой литературы в соответствии с требованиями, интернет-ресурсы указываются в последнюю очередь.

Оформление слайдов	
Стиль	– необходимо соблюдать единый стиль оформления; – нужно избегать стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; – вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки)
Фон	– для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)
Использование цвета	– на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста; – для фона и текста используются контрастные цвета; – особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	– нужно использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде; – не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде
Представление информации	
Содержание информации	– следует использовать короткие слова и предложения; – время глаголов должно быть везде одинаковым; –следует использовать минимум предлогов, наречий, прилагательных; – заголовки должны привлекать внимание аудитории – предпочтительно горизонтальное расположение информации; –наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; – если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней.
Шрифты	– для заголовков не менее 24; – для остальной информации не менее 18; – шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; – нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации;

	– для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа; – нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже, чем строчные).
Способы выделения информации	Следует использовать: – рамки, границы, заливку – разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки – рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов
Объем информации	– не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут единовременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений. – наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.

14. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ВИДАМ РАБОТ

1.Критерии оценки подготовки информационного сообщения
– актуальность темы;
– соответствие содержания теме;
– глубина проработки материала;
– грамотность и полнота использования источников;
– наличие элементов наглядности.

2.Критерии оценки подготовки реферата
– актуальность темы;
– соответствие содержания теме;
– глубина проработки материала;
– грамотность и полнота использования источников;
– соответствие оформления реферата требованиям.

3. Критерии оценки составления опорного конспекта
– соответствие содержания теме;
– правильная структурированность информации;
– наличие логической связи изложенной информации;
– соответствие оформления требованиям;
– аккуратность и грамотность изложения;
– работа сдана в срок.

4. Критерии оценки составления опорно-логической схемы по теме
– соответствие содержания теме;
– логичность структуры таблицы;

– правильный отбор информации;

– наличие обобщающего (систематизирующего, структурирующего, сравнительного) характера изложения информации;

– соответствие оформления требованиям;

– работа сдана в срок.

5. Критерии оценки создания материалов-презентаций

– соответствие содержания теме;

– правильная структурированность информации;

– наличие логической связи изложенной информации;

– эстетичность оформления, его соответствие требованиям;

– работа представлена в срок.

15. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ВНЕАУДИТОРНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Качество выполнения внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся оценивается посредством текущего контроля самостоятельной работы обучающихся с использованием балльно–рейтинговой системы. Текущий контроль СРС – это форма планомерного контроля качества и объема, приобретаемых обучающимся компетенций в процессе изучения дисциплины, проводится на практических и семинарских занятиях и во время консультаций преподавателя.

100~89% Максимальное количество баллов, указанное в карте–маршруте (табл. 1) самостоятельной работы обучающегося по каждому виду задания, обучающийся получает, если:

– обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему;

– дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;

– может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;

– правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

70~89% от максимального количества баллов обучающийся получает, если:

– неполно (не менее 70% от полного), но правильно изложено задание;

– при изложении были допущены 1–2 несущественные ошибки, которые он исправляет после замечания преподавателя;

– дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;

– может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;

– правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

50~69% от максимального количества баллов обучающийся получает, если:

– неполно (не менее 50% от полного), но правильно изложено задание;

– при изложении была допущена одна существенная ошибка;

– знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировке понятий;

– излагает выполнение задания недостаточно логично и последовательно;

– затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

49% и менее от максимального количества баллов обучающийся получает, если:
– неполно (менее 50% от полного) изложено задание;
– при изложении были допущены существенные ошибки.

В "0" баллов преподаватель вправе оценить выполненное обучающимся задание, если оно не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Сумма полученных баллов по всем видам заданий внеаудиторной самостоятельной работы составляет рейтинговый показатель студента. Рейтинговый показатель студента влияет на выставление итоговой оценки по результатам изучения дисциплины.

Таблица перевода баллов в оценку

балл	100~89%	70~89%	50~69%	49% и менее
оценка	5 (отл.)	4(хор.)	3(удов.)	2 (неудов.)

СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ
УЧЕБНАЯ ДИСЦИПЛИНА
БД.05 МАТЕМАТИКА
СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 34.02.01 Сестринское дело

Основная литература:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 616 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-13068-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/470026 (дата обращения: 03.08.2021).
2. Башмаков, М.И. Математика : учебник / Башмаков М.И. — Москва : КноРус, 2021. — 394 с. — ISBN 978-5-406-08166-2. — URL: https://book.ru/book/939220 (дата обращения: 11.03.2021). — Текст : электронный.
3. Башмаков, М.И. Математика. Практикум : учебно-практическое пособие / Башмаков М.И., Энтина С.Б. — Москва : КноРус, 2021. — 294 с. — ISBN 978-5-406-05758-2. — URL: https://book.ru/book/939104 (дата обращения: 11.03.2021). — Текст : электронный.
4. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/469433 (дата обращения: 03.08.2021).

Дополнительная литература (в том числе периодические издания):

5. Башмаков, М.И. Математика : учебник / Башмаков М.И. — Москва : КноРус, 2020. — 394 с. — ISBN 978-5-406-01567-4. — URL: https://book.ru/book/935689 (дата обращения: 11.03.2021). — Текст : электронный.
6. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/470790 (дата обращения: 03.08.2021).
7. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 2 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 320 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09135-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/470791 (дата обращения: 03.08.2021).
8. Гисин, В. Б. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. Б. Гисин, Н. Ш. Кремер. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 202 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-8846-8. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/471477 (дата обращения: 03.08.2021).
9. Далингер, В. А. Математика: задачи с модулем : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 364 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-

04793-6. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/472963 (дата обращения: 03.08.2021).

10. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 400 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-03697-8. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/449047 (дата обращения: 16.03.2021).

11. Кремер, Н. Ш. Математика для колледжей : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. Ш. Кремер, О. Г. Константинова, М. Н. Фридман ; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 10-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 346 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-05640-2. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/469282 (дата обращения: 03.08.2021).

12. Кучер, Т. П. Математика. Тесты : учебное пособие для среднего профессионального образования / Т. П. Кучер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 541 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10555-1. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/470424 (дата обращения: 03.08.2021).

13. Математика : учебник для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 450 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-6372-4. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/470067 (дата обращения: 03.08.2021).

14. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 285 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-03146-1. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/470068 (дата обращения: 03.08.2021).

15. Павлюченко, Ю. В. Математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Ю. В. Павлюченко, Н. Ш. Хассан ; под общей редакцией Ю. В. Павлюченко. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 238 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01261-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/469708 (дата обращения: 03.08.2021).

16. Седых, И. Ю. Математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. Ю. Седых, Ю. Б. Гребенщиков, А. Ю. Шевелев. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 443 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-5914-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/469860 (дата обращения: 03.08.2021).

17. Шипачев, В. С. Математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 447 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-13405-6. — Текст : электронный // ЭБС

Информационные справочно-правовые системы:

1. КонсультантПлюс –http://www.consultant.ru/

Интернет–ресурсы:
1. http://www.book.ru
2. http://www. znanium.com

Приложение 1

Образец титульного листа

Частное профессиональное образовательное учреждение
Колледж «Современная школа бизнеса»

РЕФЕРАТ

на тему____

по дисциплине__________________________________
(наименование дисциплины)

ВЫПОЛНИЛ:

____
(Ф.И.О)

____
(курс, группа)

ПРОВЕРИЛ:

____

(Ф.И.О., преподавателя)

Ставрополь, 20___

Приложение 2

Образец Содержания

СОДЕРЖАНИЕ

Приложение 3

Образец оформления презентации

1. Первый слайд:

Тема информационного сообщения (или иного вида задания): ____   Подготовил: Ф.И.О. студента, курс, группа, специальность   Руководитель: Ф.И.О. преподавателя

2. Второй слайд

План: 1. ______________________________.   2. ______________________________.   3. ______________________________.

3. Третий слайд

Литература:

4. Четвертый слайд

Лаконично раскрывает содержание информации, можно включать рисунки, автофигуры, графики, диаграммы и другие способы наглядного отображения информации